

EWA ROSZKOWSKA<sup>1</sup>

O MOŻLIWOŚCIACH WYKORZYSTANIA  
SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH  
DO PODEJMOWANIA DECYZJI WIELOKRYTERIALNYCH<sup>2</sup>

1. WSTĘP

Model skierowanych liczb rozmytych (*OFN*, ang. *Ordered Fuzzy Numbers*) został zaproponowany, a następnie rozwijany przez Kosińskiego, Prokopowicza oraz Ślęzaka w wielu pracach (Kosiński i inni, 2002, 2003; Kosiński, Prokopowicz, 2004; Kosiński, 2006). Inspiracją jego powstania „było przezwyciężenie głównych niedoskonałości klasycznego, opartego na zasadzie rozszerzenia Zadeha, rachunku na liczbach rozmytych i takie zdefiniowanie modelu liczb rozmytych, by liczby rzeczywiste można było traktować jako szczególny przypadek liczb rozmytych. Dodatkowo działania algebraiczne w takim modelu powinny być zgodne z działaniami na zwykłych liczbach rzeczywistych i posiadać własność rozdzielności mnożenia względem dodawania, a jednocześnie dawać poprawne wyniki dla liczb rozmytych” (Kosiński, Prokopowicz, 2004).

Celem niniejszego opracowania jest prezentacja przykładów interpretacji skierowania liczb rozmytych opartych na literaturze przedmiotu, a także możliwości wykorzystania *OFN* w rozmytych metodach wielokryterialnych. Badania nad wykorzystaniem skierowanych liczb rozmytych zostały zapoczątkowane w pracach Kacprzak, Roszkowska (2016, 2014), gdzie przedstawiono propozycje metod SAW (ang. *Simple Additive Weighting*) oraz TOPSIS (ang. *Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*) opartych na skierowanych trapezowych liczbach rozmytych. Orientację liczby rozmytej wykorzystano do reprezentacji typu kryterium oraz ocen lingwistycznych wariantów decyzyjnych. W niniejszym opracowaniu pokazano użyteczność obu metod do budowy systemu oceny ofert negocjacyjnych w sytuacji, gdy ocena wariantów porozumienia przebiega w warunkach niepewności, wymaga uwzględnienia danych z różnych źródeł i o różnym charakterze. Skala lingwistyczna oparta na skierowanych liczbach rozmytych okazuje się pomocna w procesie ewaluacji oraz tworzeniu rankingu ofert za pomocą metod FSAW i FTOPSIS. Operowanie

---

<sup>1</sup> Uniwersytet w Białymstoku, Wydział Ekonomii i Zarządzania, Zakład Ekonometrii i Statystyki, ul. Warszawska 63, 15-062 Białystok, Polska, e-mail: e.roszkowska@uwb.edu.pl.

<sup>2</sup> Praca zrealizowana w ramach projektu naukowego nr 2016/21/B/HS4/01583 finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki.

zmiennymi lingwistycznymi może być pewną alternatywną oceny punktowej ofert negocjacyjnych (np. SAW/SMART) (Górecka i inni, 2016).

Artykuł ma charakter metodologiczny i może stanowić inspirację do dalszych badań nad zastosowaniem skierowanych liczb rozmytych w metodach wielokryterialnych.

W dwóch kolejnych częściach pracy zaprezentowano podstawowe pojęcia i własności skierowanych liczb rozmytych, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy. W części czwartej przedstawiono przykłady interpretacji skierowanych liczb rozmytych. W części piątej propozycje metod wielokryterialnych wykorzystujących skierowane liczby rozmyte. Opracowanie kończy przykład obliczeniowy oraz podsumowanie.

## 2. SKIEROWANE LICZBY ROZMYTE I ICH WŁASNOŚCI

Pojęcie zbioru rozmytego zostało wprowadzone przez Lotfi Zadeha w 1965 roku (Zadeh, 1965) do określania znaczeń pojęć nieostrych (przybliżonych) lub pojęć werbalnych.

**Definicja 1** (Zadeh, 1965). Niech  $\mathbb{X}$  będzie przestrzenią obiektów (uniwersum). Zbiorem rozmytym  $A$  w przestrzeni  $\mathbb{X}$  nazywamy zbiór uporządkowanych par

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in \mathbb{X}\}, \quad (1)$$

gdzie  $\mu_A$  jest funkcją przynależności postaci  $\mu_A: \mathbb{X} \rightarrow [0; 1]$ .

Nośnikiem zbioru rozmytego  $A$  nazywamy następujący zbiór:

$$\text{supp}A = \{x \in X: \mu_A(x) > 0\}. \quad (2)$$

Rodzinę wszystkich zbiorów rozmytych określonych na przestrzeni oznaczamy symbolem  $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ .

Rozmyte wielkości przybliżone będące podzbiorem prostej rzeczywistej definiuje się jako liczby rozmyte (FN).

**Definicja 2** (Dubois, Prade, 1979). Liczbą rozmytą nazywamy wypukły, normalny podzbiór rozmyty  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

Zbiór rozmyty  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  nazywamy:

- *normalnym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $x_0 \in \mathbb{R}$  takie, że  $\mu_S(x_0) = 1$ ,
- *wypukłym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $x, y, z \in \mathbb{R}$  takie, że  $x \leq y \leq z \Rightarrow \mu_S(y) \geq \min\{\mu_S(x), \mu_S(z)\}$ .

Niech  $S$  i  $T$  będą liczbami rozmytymi z funkcjami przynależności  $\mu_S$  i  $\mu_T$ . Wówczas podstawowe operacje: dodawania (+), odejmowania (−), mnożenia (·) i dzielenia (/) wykorzystujące zasadę rozszerzania Zadeha definiujemy następująco (Zimmermann, 2001):

$$\mu_{S*T} = \max_{z=x*y} \min (\mu_S(x), \mu_T(y)), \quad (3)$$

gdzie \* oznacza odpowiednio +, -, ·, /,  $x, y, z \in \mathbb{R}$  (przy dzieleniu  $y \neq 0$ ).

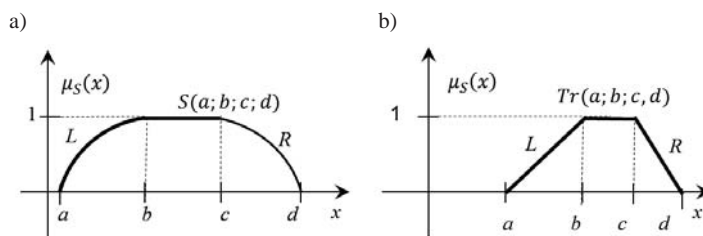
Dubois zaproponował model liczb rozmytych LR (Dubois, Prade, 1978, 1980, 1988) upraszczający znacznie wykonywanie działań arytmetycznych na liczbach rozmytych<sup>3</sup>.

**Definicja 3** (Dubois, Prade, 1978, 1988). Niech  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  będzie uporządkowaną czwórką taką, że  $a < b \leq c < d$ . Liczbę rozmytą  $S(a; b; c; d)$  nazywamy typu LR, jeśli funkcja przynależności  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  ma postać

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ L_S(x) & a \leq x < b, \\ 1 & b \leq x \leq c, \\ R_S(x) & c < x \leq d, \\ 0 & d < x, \end{cases} \quad (4)$$

gdzie funkcja  $L_S: [0,1] \rightarrow [0,1]$  jest niemalejąca, a funkcja  $R_S: [0,1] \rightarrow [0,1]$  jest nierosnąca.

W przypadku, gdy funkcje  $L$  and  $R$  są liniowe wówczas mamy trapezową liczbę rozmytą, którą będziemy oznaczać dalej jako  $Tr(a; b; c; d)$ , jeśli dodatkowo  $b = c$ , to liczbę rozmytą nazywamy trójkątną liczbą rozmytą.



Rysunek 1. Reprezentacja graficzna liczb rozmytych

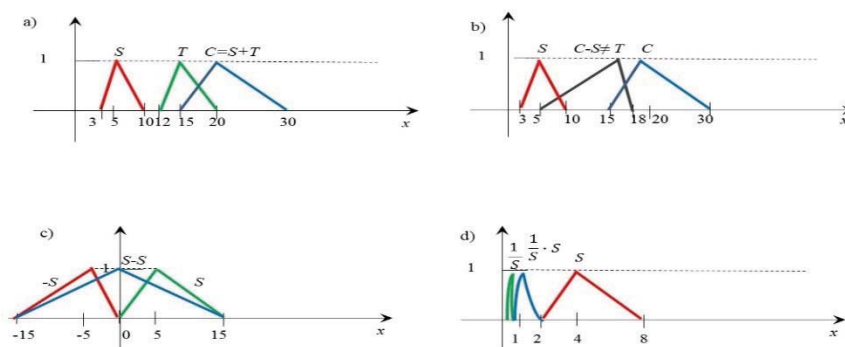
a) Liczba rozmyta  $S(a; b; c; d)$  typu LR, b) Trapezowa liczba rozmyta  $Tr(a; b; c; d)$ .

Źródło: opracowanie własne.

Należy zaznaczyć, że działaniom na klasycznych liczbach rozmytych towarzyszą pewne niezgodności z intuicją działań na liczbach rzeczywistych (Kosiński, Prokopowicz, 2004). Wykonywanie operacji dodawania lub odejmowania na FN może pociągać za sobą powiększanie się nośnika liczb wynikowych, czyli zwiększanie rozmytości liczby rozmytej, a w konsekwencji nieprecyzyjności tej liczby (rysunek 2 a).

<sup>3</sup> Zgodnie z definicją (3) działania na liczbach rozmytych wymagają wykonywania szeregu skomplikowanych operacji arytmetycznych na elementach nośników oraz ich stopniach przynależności.

Dla liczb rozmytych, jeśli  $A + B = C$ , to na ogół  $C - B \neq A$ , co powoduje brak możliwości rozwiązywania równań ogólnej postaci, np. typu  $A + X = C$  gdzie  $A$  i  $C$  są liczbami rozmytymi (rysunek 2 a, b). Przy wykorzystaniu operacji arytmetycznych na  $FN$  często nie jest możliwe wyznaczenie elementu neutralnego względem dodawania oraz odwrotnego względem mnożenia (rysunek 2 c, d).



Rysunek 2. Operacje na liczbach rozmytych

- a) Dodawanie liczb rozmytych,  $S + T$ , b) Odejmowanie liczb rozmytych,  $C - S$ , c) Działanie  $S - S$ ,  
d) Działanie  $\frac{1}{S}$ .

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawione niedoskonałości  $FN$  były bezpośrednią inspiracją powstania modelu skierowanych liczb rozmytych. Skierowaną liczbę rozmytą Kosiński (Kosiński i inni, 2002; 2003; Kosiński, 2006) zdefiniował następująco:

**Definicja 4** (Kosiński, 2006). *Skierowaną liczbą rozmytą (OFN) nazywamy uporządkowaną parę  $(f_S, g_S)$  ciągłych funkcji  $f_S: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$   $g_S: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $f_S$  – nazywamy częścią wznoszącą ( $UP_S$ ),  $g_S$  – częścią opadającą ( $DOWN_S$ )<sup>4</sup>.*

Jeżeli funkcje  $f_S, g_S$  są ściśle monotoniczne, to istnieją do nich funkcje odwrotne  $f_S^{-1}(x), g_S^{-1}(x)$  określone na odpowiednich przedziałach  $UP_S = [f_S(0), f_S(1)]$  oraz  $DOWN_S = [g_S(1), g_S(0)]$ . Do zbiorów  $UP_S$  oraz  $DOWN_S$  dodajemy na przedziale  $[f_S(1), g_S(1)]$  funkcję stałą  $CONST$  równą 1. Skierowaną liczbę rozmytą  $OFN$  będziemy oznaczali dalej w postaci ogólnej przez  $\vec{S}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$ .

W przypadku, gdy funkcje  $f_S^{-1}(x), g_S^{-1}(x)$  są liniowe  $OFN$  nazywamy trapezową liczbą rozmytą i oznaczamy symbolem  $\vec{Tr}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$ . Skierowana liczba rozmyta  $\vec{Tr}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$  jest wyznaczona wówczas jednoznacznie za pomocą czterech liczb  $f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0)$  gdzie  $UP_S = [f_S(0), f_S(1)]$ ,

<sup>4</sup> Od konferencji ICAISC w 2015 dla uhonorowania i podkreślenia wkładu Profesora Kosińskiego (1946–2014) w rozwój modelu skierowanych liczb rozmytych powstała propozycja zmiany nazwy Skierowanych Liczb Rozmytych (ang. *Ordered Fuzzy Numbers*), na Liczby Rozmyte Kosińskiego (ang. *Kosinski's Fuzzy Numbers* – KFN).

$DOWN_S = [g_S(1), g_S(0)]$ . Dowolna liczba rzeczywista  $a \in \mathbb{R}$  jest reprezentowana przez  $OFN$  jako  $\vec{Tr}(a; a; a; a)$ .

Wykorzystując funkcje odwrotne  $f_S^{-1}(x)$ ,  $g_S^{-1}(x)$  funkcję przynależności skierowanej liczby rozmytej Kosiński (2006) określił następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} f_S^{-1}(x) & \text{gdy } x \in UP_S, \\ 1 & \text{gdy } f_S(1) \leq x \leq g_S(1), \\ g_S^{-1}(x) & \text{gdy } x \in DOWN_S, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases} \quad (5)$$

Kolejność funkcji odwrotnych wyznacza skierowanie (orientację) liczby rozmytej, którą w interpretacji graficznej przedstawia się za pomocą strzałki. W przypadku orientacji dodatniej kierunek  $OFN$  jest zgodny z kierunkiem osi  $OX$  liczb rzeczywistych, a orientacji ujemnej kierunek  $OFN$  jest przeciwny do kierunku osi  $OX$  liczb rzeczywistych. Przykłady skierowanych liczb rozmytych oraz odpowiadających im funkcji wyznaczonych za pomocą wzoru (5) zaprezentowano na rysunku 3. Warto tutaj zwrócić uwagę, na różnice między koncepcją skierowanych liczb rozmytych a koncepcją zbiorów rozmytych, czy też liczb rozmytych Zadeha. Zauważmy, że jeśli spełniony jest warunek (6) lub (7),

$$f_S(0) \leq f_S(1) \leq g_S(1) \leq g_S(0), \quad (6)$$

$$f_S(0) \geq f_S(1) \geq g_S(1) \geq g_S(0) \quad (7)$$

to funkcja postaci (5) odpowiada funkcji przynależności w klasycznym modelu liczb rozmytych (por. rysunek 3 b, d).

Warunek (6) oznacza, że funkcja  $f_S$  jest ściśle rosnąca lub stała, a funkcja  $g_S$  jest ściśle malejąca, natomiast warunek (7), że funkcja  $f_S$  jest ściśle malejąca lub stała, a funkcja  $g_S$  jest ściśle rosnąca lub stała. Jeśli ponadto  $f_S(0) < g_S(0)$  to mówimy o orientacji dodatniej liczby rozmytej, jeśli  $f_S(0) > g_S(0)$  o orientacji ujemnej, a gdy  $f_S(0) = g_S(0)$  o braku orientacji.

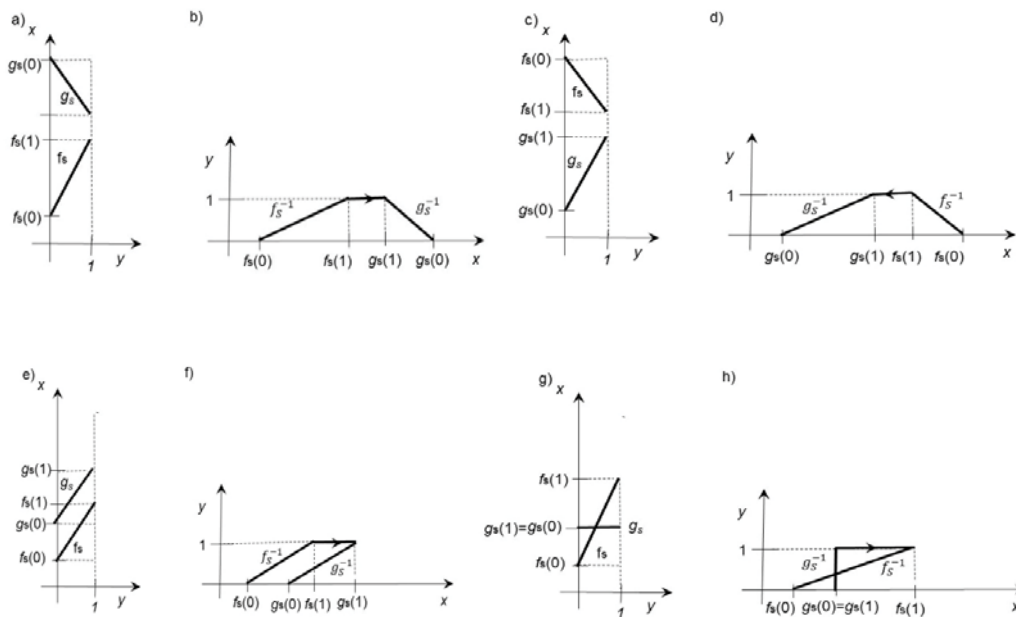
Ponadto  $OFN \vec{S}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$  spełniająca warunek (6) wyznacza  $FN S(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$  opisaną przez  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < f_S(0), \\ f_S^{-1}(x) & f_S(0) \leq x < f_S(1), \\ 1 & f_S(1) \leq x \leq g_S(1), \\ g_S^{-1}(x) & g_S(1) < x \leq g_S(0), \\ 0 & g_S(0) < x. \end{cases} \quad (8)$$

Natomiast OFN  $\vec{S}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$  spełniająca warunek (7) wyznacza FN  $S(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$  opisaną przez  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  następująco.

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < g_S(0), \\ g_S^{-1}(x) & g_S(0) \leq x < g_S(1), \\ 1 & g_S(1) \leq x \leq f_S(1), \\ f_S^{-1}(x) & f_S(1) < x \leq f_S(0), \\ 0 & f_S(0) < x. \end{cases} \quad (9)$$

Skierowaną liczbę rozmytą, dla której funkcja (5) nie wyznacza funkcji przynależności w klasycznym ujęciu Kosiński nazywa *niewłaściwą* (np. rysunek 3 f, h).



Rysunek 3. Przykłady skierowanych liczb rozmytych i odpowiadających im funkcji określonych wzorem (5)

Źródło: opracowanie własne.

### 3. DZIAŁANIA NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH

Poniżej przedstawimy definicje i podstawowe własności operacji arytmetycznych na skierowanych liczbach rozmytych.

**Definicja 5** (Kosiński, 2006). Niech  $\vec{A} = (f_A, g_A)$ ,  $\vec{B} = (f_B, g_B)$ ,  $\vec{C} = (f_C, g_C) \in \mathfrak{K}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Podstawowe operacje na skierowanych liczbach rozmytych: dodawanie ( $\oplus$ ), odejmowanie ( $\ominus$ ), mnożenie ( $\odot$ ) dzielenie ( $\oslash$ ) definiuje się następująco:

1. Suma

$$\vec{C} = \vec{A} \oplus \vec{B}, \quad (10)$$

$$\text{gdzie } f_C(y) = f_A(y) + f_B(y) \wedge g_C(y) = g_A(y) + g_B(y). \quad (11)$$

2. Różnica

$$\vec{C} = \vec{A} \ominus \vec{B}, \quad (12)$$

$$\text{gdzie } f_C(y) = f_A(y) + f_B(y) \wedge g_C(y) = g_A(y) + g_B(y). \quad (13)$$

3. Iloczyn

$$\vec{C} = \vec{A} \odot \vec{B}, \quad (14)$$

$$\text{gdzie } f_C(y) = f_A(y) \cdot f_B(y) \wedge g_C(y) = g_A(y) \cdot g_B(y). \quad (15)$$

4. Iloraz

$$\vec{C} = \vec{A} \oslash \vec{B}, \quad (16)$$

$$\text{gdzie } \vec{B} \neq 0 \text{ oraz } f_C(y) = f_A(y)/f_B(y) \wedge g_C(y) = g_A(y)/g_B(y). \quad (17)$$

5. Iloczyn  $\vec{A}$  przez liczbę  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \circ \vec{A} = \vec{S}(\alpha; \alpha; \alpha; \alpha) \odot \vec{A}.$$

Algebra skierowanych liczb rozmytych umożliwia posługiwanie się pojęciami rozmytymi, ilościowo nieostryimi, w sposób podobny do rachunku na liczbach rzeczywistych. Jedną z ważniejszych zalet OFN jest to, że nie zawsze wynikiem operacji na nich jest liczba o większym nośniku. Wykonując operację arytmetyczną można także otrzymać liczbę, którą interpretuje się jako liczbę rzeczywistą i nazywa *singletonem*, co

było niemożliwe w wyniku wykonywania działań na klasycznych liczbach rozmytych. Dowolna liczba rozmyta posiada także liczbę przeciwną oraz odwrotną.

Warto w tym miejscu nadmienić, że operacje arytmetyczne wprowadzone przez Kosińskiego są tożsame z operacjami zdefiniowanymi przez Dubois and Prade (1978) w sytuacji, gdy  $OFN$  posiadają tę samą orientację. Natomiast, gdy liczby rozmyte posiadają przeciwne orientacje wynikiem działania mogą być *niewłaściwe* skierowane liczby rozmyte (Kosiński i inni, 2003), które nie poddają się już prostej interpretacji.<sup>5</sup> Przykładowo, niewłaściwe skierowane liczby rozmyte otrzymamy w wyniku operacji dodawania  $\overrightarrow{Tr}(1; 3; 7; 8) \oplus \overrightarrow{Tr}(5; 4; 4; 2)$  oraz mnożenia  $\overrightarrow{Tr}(1; 3; 5; 6) \odot \overrightarrow{Tr}(4; 3; 3; 1)$ .

W praktycznych zastosowaniach spotykamy się z zagadnieniem porównywania skierowanych liczb rozmytych. Najczęściej wykorzystuje się do tego celu operację wyostrzania polegającą na przypisaniu skierowanej liczbie rozmytej liczby rzeczywistej. W literaturze przedmiotu można znaleźć szereg propozycji wyostrzania liczb rozmytych (Chen, Hwang, 1992; Yager, Filev, 1994). Podawane są także ogólne kryteria metod wyostrzania stanowiące wytyczne pozwalające tworzyć poprawne modele. Brak jest jednak jednej uniwersalnej metody wyostrzania, a jej wybór uzależniony jest do analizowanego problemu oraz pożądanych przez decydenta własności procedury. Podane niżej formuły wyostrzania dotyczą dodatnich skierowanych liczb rozmytych.

**Twierdzenie 1** (Kosiński, Wilczyńska-Sztyma, 2010). Niech  $\vec{S}(f_S(0); f_S(1); g_S(1); g_S(0))$ . Wówczas

$$\phi_{WM}(\vec{S}) = \lambda \cdot f_S(1) + (1 - \lambda) \cdot g_S(1), \quad \lambda \in [0; 1], \quad (18)$$

$$\text{np: } \phi_{FM}(\vec{S}) = f_S(1), \quad \phi_{LM}(\vec{S}) = g_S(1), \quad \phi_{MM}(\vec{S}) = \frac{1}{2} \cdot (f_S(1) + g_S(1)),$$

$$\phi_{CG}(\vec{S}) = \begin{cases} \frac{\int_0^1 \frac{f_S(y) + g_S(y)}{2} \cdot (f_S(y) - g_S(y)) dy}{\int_0^1 (f_S(y) - g_S(y)) dy} & f_S(0) \neq g_S(0), \\ f_S(0) & f_S(0) = g_S(0), \end{cases} \quad (19)$$

$$\phi_{GM}(f_S, g_S) = \begin{cases} \frac{g_S(1)g_S(0) - f_S(0)f_S(1)}{g_S(1) + g_S(0) - f_S(0) - f_S(1)} & f_S(0) \neq g_S(0), \\ f_S(0) & f_S(0) = g_S(0). \end{cases} \quad (20)$$

<sup>5</sup> Ciekawą propozycję modyfikacji teorii skierowanych liczb rozmytych, w której przestrzeń liczb Kosińskiego jest zamknięta ze względu na zmodyfikowane działania arytmetyczne zaproponowano w pracy Piasecki (2017).



Odległość między skierowanymi liczbami rozmytymi  $\vec{Tr}(a; b; c; d)$ ,  $\vec{Tr}(p; q; r; s)$  wyznacza się zgodnie ze wzorem:

$$\begin{aligned} d(\vec{Tr}(a; b; c; d), \vec{Tr}(p; q; r; s)) &= \\ &= \sqrt{0,25((a-p)^2 + (b-q)^2 + (c-r)^2 + (d-s)^2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \max(\vec{Tr}(a; b; c; d), \vec{Tr}(p; q; r; s)) &= \\ &= \vec{Tr}(\max(a, p); \max(b, q); \max(c, r); \max(d, s)), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \min(\vec{Tr}(a; b; c; d), \vec{Tr}(p; q; r; s)) &= \\ &= \vec{Tr}(\min(a, p); \min(b, q); \min(c, r); \min(d, s)). \end{aligned} \quad (23)$$

#### 4. PRZYKŁADY INTERPRETACJI ORIENTACJI SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH

Bilgiç, Türken (2000) wyróżniają pięć sposobów interpretacji informacji przenoszonej przez zbiory rozmyte: w terminach wiarygodności, zbiorów losowych, podobieństwa, użyteczności oraz pomiaru. Metody konstrukcji funkcji przynależności mogą wykorzystywać oceny eksperta (zespołu ekspertów) a także wyniki obiektywnych pomiarów. W swoje pracy Bilgiç i Türken opisują także główne metody oceny funkcji przynależności tj. metoda ankietowa, bezpośredniej oceny, oceny odwrotnej, oceny przedziałowej, metodę egzemplifikacji oraz metodę porównań parami.

Dwie podstawowe interpretacje liczby rozmytej, to: *stopień*, w jakim zmienna posiada pewną własność oraz *możliwość*, z jaką pewna wielkość przyjmie określoną wartość. Interpretację tę można także przenieść na skierowane liczby rozmyte, którym odpowiada klasyczna funkcja przynależności. Dodatkowo skierowanie liczby rozmytej rozszerza potencjalne możliwości interpretacji, a także zastosowań liczb rozmytych. W pracach Kosiński (2006), Kacprzak (2010) znajdziemy przykłady wykorzystania orientacji skierowanej liczby rozmytej np. do opisu prognoz, tendencji, ocen, charakteru zmian wartości cechy czy parametrów. Sytuację pożądanego wzrostu wartości cechy reprezentuje dodatnia orientacja skierowanej liczby rozmytej, a niepożądanego wzrostu ujemna orientacja liczby rozmytej. W pracy Wilczyńska-Sztyma (2009) przedstawiono rozważania na temat obserwacji rozmytej, gdzie „czas lub monotoniczność (narastanie, zanikanie zjawiska) może być dla projektanta systemu decydującym czynnikiem wpływającym na skierowanie liczb”, możliwości interpretacji skierowania liczby rozmytej jako wyznacznika kierunku ruchu, do analizy tendencji oraz dynamiki badanego zjawiska.

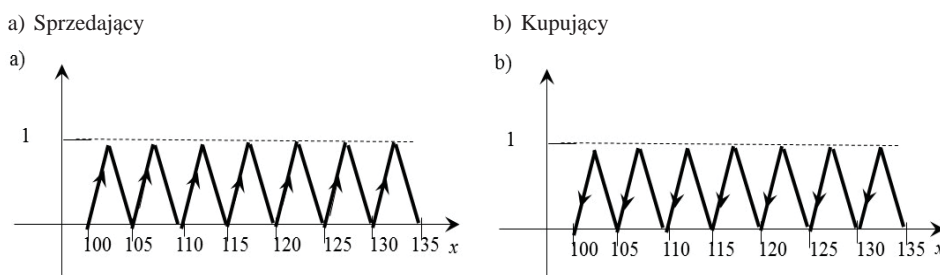
Orientację skierowanej liczby rozmytej można także wykorzystać do reprezentacji typu kryterium w rozmytych metodach wielokryterialnych. W przypadku kryterium typu zysk, tzn. „im więcej tym lepiej” dane mogą być reprezentowane przez skierowane liczby rozmyte o dodatniej orientacji, a typu strata, tzn. „im mniej tym lepiej” o ujemnej orientacji (Kacprzak, Roszkowska, 2014, 2016).

Poniżej zaprezentowano wybrane przykłady wskazujące na różne możliwości interpretacji orientacji skierowanych liczb rozmytych.

**Przykład 1.** Liczba rozmyta może oznaczać stopień, w jakim obiekt posiada pewną własność. Cena towaru na poziomie „około 102,5 PLN”, wahająca się między wartościami 100 PLN i 105 PLN może być reprezentowana przez skierowaną trapezową liczbę rozmytą. Wartość 102,5 PLN oznacza dokładnie cenę 102,5 PLN, czyli własność spełniona jest w stopniu 1, wartości poniżej 102 PLN oraz powyżej 105 PLN już brak tej własności (*około 102,5 PLN*), czyli własność w stopniu 0. Wartości pomiędzy 100 PLN oraz 105 PLN będą ceną *około* w różnym stopniu, przy czym im cena bliższa jest 102 PLN, tym stopień bliższy jest 1. Ponieważ dla Sprzedającego „*im wyższa cena tym lepiej*”, więc cena „*około 102,5 PLN*” będzie reprezentowana przez skierowaną liczbę rozmytą  $\vec{Tr}(100; 102,5; 102,5; 105)$  o dodatniej orientacji. Z kolei dla Kupującego, gdzie „*im niższa cena tym lepiej*” – przez skierowaną liczbę rozmytą  $\overleftarrow{Tr}(105; 102,5; 102,5; 100)$  o ujemnej orientacji.

Kupujący może także uważać, cenę zakupu na poziomie „około 102,5 PLN” za cenę „*wysoką*”, wówczas liczba rozmyta  $\vec{Tr}(100; 102,5; 102,5; 105)$  reprezentuje wyrażenie „*cena wysoka*”. Z kolei Sprzedający cenę sprzedaży „około 102,5 PLN” uznaje za *niską*. Wówczas liczba rozmyta  $\overleftarrow{Tr}(105; 102,5; 102,5; 100)$  reprezentuje dla Sprzedającego wyrażenie „*cena niska*”.

**Przykład 2.** Skierowanie liczby rozmytej może określać rodzaj kryterium w rozmytych metodach wielokryterialnych, tzn. w przypadku kryterium typu zysk zmienne reprezentowane są przez skierowane liczby rozmyte o dodatniej orientacji, a kryterium typu strata przez skierowane liczby rozmyte o ujemnej orientacji (rysunek 4).



Rysunek 4. Reprezentacja ceny towaru w negocjacjach między kupującym i sprzedającym za pomocą skierowanych liczb rozmytych

Źródło: opracowanie własne.

**Przykład 3.** Liczba rozmyta może być pewnego rodzaju odpowiednikiem rozkładu prawdopodobieństwa i przedstawiać rozkład możliwości zaistnienia pewnego zdarzenia. Przyjmijmy, że trapezowa skierowana liczba rozmyta  $\vec{Tr}(a; b; c; d)$  przedstawia rozkład możliwości przyszłego np. przychodu, kosztu czy zyskiem firmy, który w danym momencie jest nieznan, a został wygenerowanego na podstawie dialogu z ekspertami, ich wiedzy lub subiektywnego odczucia (Norwich, Turksen, 2004). Ekspert uważa, iż wartości poza przedziałem  $(a, d)$  są niemożliwe, wartości z przedziału  $(c, d)$  są możliwe w stopniu 1, a pozostałe wartości w różnym stopniu, ale tym większym, im bliższe są one liczbie z przedziału  $(c, d)$ . Skierowanie liczby rozmytej wykorzystuje się do zobrazowania tendencji wzrostowej lub spadkowej. Jeśli istnieje przypuszczenie, że przychód/zyski/dochód/ będą rosły w czasie wtedy skierowanie liczby rozmytej będzie dodatnie, przeciwnym przypadku – ujemne. Tabela 1 zawiera wyznaczony przewidywalny dochód firmy, gdzie przychody i koszty wyrażone zostały za pomocą skierowanych liczb rozmytych (por. Wilczyńska-Sztyma, 2009).

Tabela 1.

Reprezentacja prognozowanego przychodu, kosztów oraz dochodu firmy za pomocą skierowanych liczb rozmytych

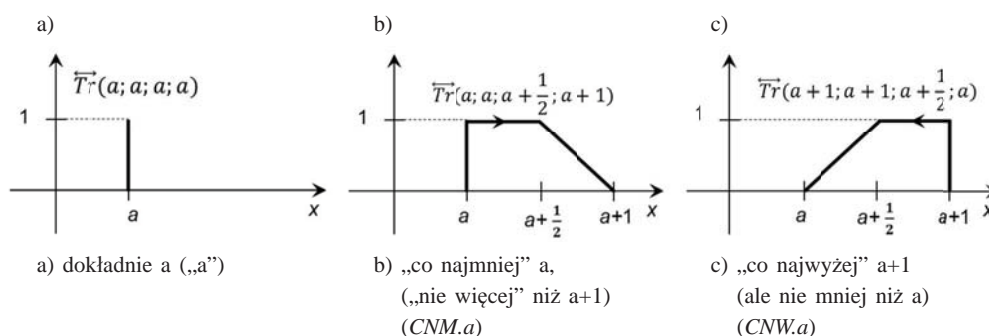
Lp.	Przychód (P)	Koszty (K)	Dochód (D = P – K)
1.	$\vec{Tr}(100; 102; 104; 110)$	$\vec{Tr}(50; 51; 52; 55)$	$\vec{Tr}(50; 51; 52; 55)$
2.	$\vec{Tr}(100; 102; 104; 110)$	$\vec{Tr}(50; 60; 62; 70)$	$\vec{Tr}(50; 42; 42; 40)$
3.	$\vec{Tr}(100; 102; 104; 110)$	$\vec{Tr}(50; 48; 46; 45)$	$\vec{Tr}(50; 54; 58; 65)$
4.	$\vec{Tr}(100; 102; 104; 110)$	$\vec{Tr}(50; 65; 66; 70)$	$\vec{Tr}(50; 37; 38; 40)$

Źródło: opracowanie własne.

Załóżmy, że przychód firmy został przedstawiony za pomocą liczby  $\vec{Tr}(100; 102; 104; 110)$ . Wartość 100 jest wyjściowym punktem, dla którego prognozowane przychody mają wzrosnąć, a przedział przedział (102,104) informuje o prognozowanych optymalnych wartościach przychodu.

- 1) Prognozowane koszty zostały przedstawione za pomocą liczby  $\vec{Tr}(50; 55; 58; 60)$ . Wówczas wzrostowi kosztów od 50 do 55, odpowiada wzrost prognozowanych przychodów od 100 do 110, ale także wzrost prognozowanego dochodu od 50 do 55.
- 2) Prognozowane koszty zostały przedstawione za pomocą liczby  $\vec{Tr}(50; 60; 62; 70)$ . Wówczas wzrostowi kosztów od 50 do 70 odpowiada wzrost prognozowanych przychodów od 100 do 110, ale spadek dochodu od 50 do 40.
- 3) Prognozowane koszty zostały przedstawione za pomocą liczby  $\vec{Tr}(50; 48; 46; 45)$ . Wówczas spadkowi kosztów od 50 do 45 odpowiada wzrost prognozowanych przychodów od 100 do 110 oraz wzrost dochodu od 50 do 65.
- 4) Prognozowane koszty zostały przedstawione za pomocą liczby  $\vec{Tr}(50; 65; 66; 70)$ . W wyniku działania odejmowania na liczbach skierowanych otrzymujemy nie-właściwą liczbę rozmytą.

**Przykład 4.** Zbiory rozmyte umożliwiają opis zjawisk przy użyciu określeń jakościowych. Pojęcie zmiennej lingwistycznej, która przyjmuje jako swe wartości wyrażenia z języka naturalnego, utożsamiane z określonymi zbiorami rozmytymi zostało wprowadzone przez Zadeha (1975). Wyrażenia z języka potocznego np.: *bardzo słaby*, *słaby*, *średni*, *dobry*, *bardzo dobry* itp. mogą być zapisane formalnie w postaci odpowiednio skonstruowanych zbiorów rozmytych. Poniżej przedstawimy propozycję skali numerycznej oraz opartej na niej lingwistycznej wykorzystującej skierowane liczby rozmyte. Skierowanie liczby rozmytej pozwala na rozszerzenie skali numerycznej zadanej określeniami typu *dokładnie a*, przez wyrażenia *co najmniej a* oraz *co najwyżej a*, a w konsekwencji rozszerzenie skali lingwistycznej zadanej określeniami np. *dobry*, przez wyrażenia *co najwyżej dobry*, *co najmniej dobry*. Do określenia wartości liczbowej wyrażen lingwistycznych wykorzystamy skierowane trapezowe liczby rozmyte (rysunek 5, tabela 2), (Kacprzak, Roszkowska, 2014, 2016).



Rysunek 5. Skierowane liczby rozmyte i ich numeryczna interpretacja

Źródło: opracowanie własne (por. Kacprzak, Roszkowska, 2016).

Zaletą proponowanego podejścia jest fakt, że, w wyniku działań na wyrażeniach typu „co najmniej” oraz „co najwyżej” możliwe jest otrzymanie ocen dokładnych, reprezentowanych przez *singletony*. Mamy mianowicie:

$$\vec{T}_r(a; a; a + 0,5; a + 1) \oplus \vec{T}_r(b; b; b - 0,5; b - 1) = \vec{T}_r(a + b; a + b; a + b; a + b).$$

Tabela 2.

Skala lingwistyczna oraz skala numeryczna oparta na skierowanych liczbach rozmytych

Zmienne lingwistyczne	Skala lingwistyczna	Skala Numeryczna	Skierowana trapezowa liczba rozmyta
<b>Bardzo słaby</b>	<b>BS</b>	<b>1</b>	$\vec{X}_1 = \vec{T}_r(1; 1; 1; 1)$
Co najmniej Bardzo Słaby	<i>L.BS</i>	<i>CNM.1</i>	$\vec{X}_{G1} = \vec{T}_r(1; 1; 1,5; 2)$
Co najwyżej Słaby	<i>M.S</i>	<i>CNW.2</i>	$\vec{X}_{L2} = \vec{T}_r(2; 2; 1,5; 1)$

Tabela 2. (cd.)

Zmienne lingwistyczne	Skala lingwistyczna	Skala Numeryczna	Skierowana trapezowa liczba rozmyta
Słaby	<b>S</b>	<b>2</b>	$\vec{X}_2 = \vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$
Co najmniej Słaby	<i>L.S</i>	<i>CN. 2</i>	$\vec{X}_{G2} = \vec{Tr}(2; 2; 2,5; 3)$
Co najwyżej Średni	<i>M.SR</i>	<i>CNW. 3</i>	$\vec{X}_{L3} = \vec{Tr}(3; 3; 2,5; 2)$
Średni	<b>SR</b>	<b>3</b>	$\vec{X}_3 = \vec{Tr}(3; 3; 3; 3)$
Co najmniej Średni	<i>L.SR</i>	<i>CNW. 3</i>	$\vec{X}_{G3} = \vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$
Co najwyżej Dobry	<i>M.D</i>	<i>CN. 4</i>	$\vec{X}_{L4} = \vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$
Dobry	<b>D</b>	<b>4</b>	$\vec{X}_4 = \vec{Tr}(4; 4; 4; 4)$
Co najmniej Dobry	<i>L.D</i>	<i>CNW. 4</i>	$\vec{X}_{G4} = \vec{Tr}(4; 4; 4,5; 5)$
Co najwyżej Bardzo Dobry	<i>M.BD</i>	<i>LE. 5</i>	$\vec{X}_{L5} = \vec{Tr}(5; 5; 4,5; 4)$
Bardzo Dobry	<b>BD</b>	<b>5</b>	$\vec{X}_5 = \vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$

Zmienne lingwistyczne pogrubione odpowiadają skali numerycznej „dokładnie a”, a = 1,2,3,4,5.

Źródło: opracowanie własne (por. Kacprzak, Roszkowska, 2016).

Podstawowa 5-stopniowa skala numeryczna oraz lingwistyczna oparta na skierowanych liczbach rozmytych ma postać:

$$PSL = \{\vec{X}_j = \vec{Tr}(j; j; j; j): j = 1, 2, \dots, 5\}. \tag{24}$$

Rozszerzona 5-skala numeryczna oraz lingwistyczna oparta na skierowanych liczbach rozmytych ma postać:

$$SL = \{\vec{X}_j: j = 1, \dots, 5\} \cup \{\vec{X}_{Lj}: j = 2, \dots, 5\} \cup \{\vec{X}_{Gj}: j = 1, \dots, 4\}, \tag{25}$$

gdzie:  $\vec{X}_j = \vec{Tr}(j; j; j; j)$ ,  $\vec{X}_{Lj} = \vec{Tr}(j; j; j - 0,5; j - 1)$ ,  $\vec{X}_{Gj} = \vec{Tr}(j; j; j + 0,5; j + 1)$ .

### 5. METODY WIELOKRYTERIALNE OPARTE NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH

Wielokryterialne wspomaganie decyzji jest dyscypliną naukową wywodzącą się z badań operacyjnych i definiowaną jako rozwiązywanie złożonych problemów decyzyjnych, w których uwzględnia się wiele, często przeciwstawnych punktów widzenia. Metodami wielokryterialnymi określane są metody konstrukcji rankingu, wyboru lub klasyfikacji, które uwzględniają istnienie wielu kryteriów podlegających optymalizacji (Chen, Hwang, 1992; Trzaskalik, 2014). Wariant decyzyjny na etapie wstępnym składać się może z wartości nieporównywalnych ze sobą np. wartości rzeczywistych,

przedziałowych, rozmytych czy zmiennych lingwistycznych. Stąd niezbędna jest jego konwersja do postaci umożliwiającej operacje porównawcze. Przyjmujemy, że dowolny wariant decyzyjny jest reprezentowany przez skierowane trapezowe liczby rozmyte.

Problem decyzyjny można opisać następująco:

Niech

- $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  – zbiór kryteriów,
- $\mathcal{X} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  – zbiór wariantów decyzyjnych,
- $A_i = (\vec{X}_{i,1}, \vec{X}_{i,2}, \dots, \vec{X}_{i,n})$  – reprezentacja wariantu decyzyjnego przez skierowane trapezowe liczby rozmyte, gdzie  $\vec{X}_{i,j} = \overrightarrow{Tr}(a_{ij}; b_{ij}; c_{ij}; d_{ij})$  – reprezentacja  $i$ -tego wariantu decyzyjnego ze względu na  $j$ -te kryterium,  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $a_{ij} > 0$ . Dodatkowo, w przypadku, gdy  $j$  jest kryterium typu zysk  $\vec{X}_{i,j}$  jest trapezową liczbą rozmytą o dodatniej orientacji, a gdy  $j$  – kryterium typu strata – o ujemnej orientacji.
- $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$  – wektor wag,  $w_i \in \mathbb{R}$  oraz  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

W metodach wielokryterialnym istotną rolę odgrywa operacja normalizacji zmiennych. Poniżej prezentujemy dwie formuły normalizacyjne dla skierowanych liczb rozmytych, które są odpowiednikami formuł normalizacyjnych dla klasycznych liczb rozmytych (Chen, 2000; Roszkowska, 2014):

a)

$$\begin{aligned} \vec{Xn}_{i,j} &= \left( \frac{a_{ij}}{d_j^{max}}; \frac{b_{ij}}{d_j^{max}}; \frac{c_{ij}}{d_j^{max}}; \frac{d_{ij}}{d_j^{max}} \right) \text{ jeśli } j \text{ jest kryterium typu zysk,} \\ \vec{Xn}_{i,j} &= \left( \frac{a_j^{min}}{a_{ij}}; \frac{a_j^{min}}{b_{ij}}; \frac{a_j^{min}}{c_{ij}}; \frac{a_j^{min}}{d_{ij}} \right) \text{ jeśli } j \text{ jest kryterium typu strata,} \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie  $a_j^{min} = \min_i a_{ij}$ ,  $d_j^{max} = \max_i d_{ij}$ .

b)

$$\begin{aligned} \vec{Xn}_{i,j} &= \left( \frac{a_{ij}-a_j^{min}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{b_{ij}-a_j^{min}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{c_{ij}-a_j^{min}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{d_{ij}-a_j^{min}}{d_j^{max}-a_j^{min}} \right) \text{ jeśli } j \text{ jest kryterium typu zysk,} \\ \vec{Xn}_{i,j} &= \left( \frac{d_j^{max}-a_{ij}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{d_j^{max}-b_{ij}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{d_j^{max}-c_{ij}}{d_j^{max}-a_j^{min}}; \frac{d_j^{max}-d_{ij}}{d_j^{max}-a_j^{min}} \right) \text{ jeśli } j \text{ jest kryterium typu strata,} \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie  $a_j^{min} = \min_i a_{ij}$ ,  $d_j^{max} = \max_i d_{ij}$  wyznaczone są z wykorzystaniem wzorów (23)–(22).

FSAW OPARTA NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH

W rozmytej procedurze SAW (FSAW) wariantowi decyzyjnemu przypisuje się kombinację liniową wektora wagowego oraz znormalizowanych wartości opcji wariantów decyzyjnych zgodnie ze wzorem (por. Kacprzak, Roszkowska, 2016):

$$FSAW(A_i) = w_1 \circ \vec{X}_{i,1} \oplus w_2 \circ \vec{X}_{i,2} \oplus \dots \oplus w_n \circ \vec{X}_{i,n}, \quad (28)$$

gdzie  $w_i \in \mathbb{R}$  oraz  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

W sytuacji, gdy warianty decyzyjne są oceniane na wspólnej skali lingwistycznej, czyli

$$\vec{X}_{i,j} \in LS = \{\vec{X}_j; j = 1, 2, \dots, r\} \cup \{\vec{X}_{Lj}; j = 2, 3, 4, r\} \cup \{\vec{X}_{Gj}; j = 1, 2, 3, r - 1\},$$

gdzie:  $\vec{X}_j = \vec{Tr}(j; j; j; j)$ ,  $\vec{X}_{Lj} = \vec{Tr}(j; j; j - 0,5; j - 1)$ ,  $\vec{X}_{Gj} = \vec{Tr}(j; j; j + 0,5; j + 1)$  możemy przyjąć:

$$FSAW_L(A_i) = w_1 \circ \vec{X}_{i,1} \oplus w_2 \circ \vec{X}_{i,2} \oplus \dots \oplus w_n \circ \vec{X}_{i,n}, \quad (29)$$

gdzie  $w_i \in \mathbb{R}$  oraz  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

Następnie do porównania liczb skierowanych liczb rozmytych można wykorzystać jedną z operacji wyostrzania skierowanych liczb rozmytych ((18)–(20)).

FTOPSIS OPARTA NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH

W przypadku rozmytej metody FTOPSIS z wykorzystaniem skierowanych trapezowych liczb rozmytych wyznacza się dodatkowo rozwiązanie idealne oraz anty-idealne. Rozwiązanie idealne ma postać:

$$FPIS = (\vec{I}_1; \vec{I}_2; \dots; \vec{I}_n) \in \mathfrak{R}^n, \quad (30)$$

gdzie  $\vec{I}_r = \max_i \vec{X}_{ir}$  z wykorzystaniem wzoru (22).

Rozwiązanie anty-idealne ma postać:

$$FNIS = (\vec{AI}_1, \vec{AI}_2, \dots, AI_n) \in \mathfrak{R}^n, \quad (31)$$

gdzie  $\vec{AI}_r = \min_i \vec{X}_{ir}$  z wykorzystaniem wzoru (23).



Jeśli warianty decyzyjne są oceniane na wspólnej skali lingwistycznej (22), czyli

$$\vec{X}_{i,j} \in LS = \{\vec{X}_j: j = 1, 2, \dots, r\} \cup \{\vec{X}_{Lj}: j = 2, 3, 4, r\} \cup \{\vec{X}_{Gj}: j = 1, 2, 3, r-1\},$$

przyjmujemy

$$\vec{I}_r = \vec{X}_r \text{ oraz } \vec{A}\vec{I}_r = \vec{X}_1 \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

Wartość syntetycznego miernika (oceny)  $i$ -tego wariantu  $A_i$  obliczamy zgodnie ze wzorem (por. Kacprzak, Roszkowska, 2014):

$$FTOPSIS(A_i) = \frac{d(A_i, FNIS)}{d(A_i, FNIS) + d(A_i, FPIS)}, \quad (33)$$

gdzie:

$d(A_i, FPIS) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot d(\vec{X}_{n_{i,j}}, \vec{I}_r)$  – odległość wariantu decyzyjnego  $A_i$  od  $FPIS$ ,  
 $d(A_i, FNIS) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot d(\vec{X}_{i,j}, \vec{A}\vec{I}_1)$  – odległość wariantu decyzyjnego  $A_i$  od  $FNIS$   
( $i = 1, 2, \dots, m$ ) z wykorzystaniem wzoru (21).

Warianty decyzyjne ze zbioru  $\mathcal{X} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  porządkujemy następnie liniowo ze względu na malejącą wartość miernika ich oceny  $FTOPSIS(A_i)$ .

Warto przy tym zaznaczyć, że zaletą skali lingwistycznej (24) jest to, iż w wyniku operacji na skierowanych trapezowych liczbach rozmytych w procedurze FSAW lub FTOPSIS otrzymujemy tylko właściwe skierowane liczby rozmyte. Proponowane podejście budowy skali lingwistycznej wykorzystującej skierowanie liczby rozmytej może być modyfikowane, trzeba jednak uwzględnić problem wystąpienia i ewentualnej interpretacji niewłaściwej skierowanej liczby rozmytej jako wynik cząstkowych operacji procedury agregującej cząstkowe oceny.

## 6. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

W niniejszym opracowaniu użyteczność metody FSAW oraz FTOPSIS zaprezentowano na przykładzie budowy systemu oceny ofert negocjacyjnych. Narzędzia wielokryterialnej analizy decyzyjnej (Kilgour i inni, 2010; Salo, Hämäläinen, 2010) są z powodzeniem do budowy systemu oceny ofert ze względu na fakt, że analiza negocjacyjna wymaga zwykle uwzględnienia jednocześnie wielu konfliktowych kwestii stanowiących przedmiot rozmów. Metody rozmyte, tj. FSAW oraz FTOPSIS mogą być przydatne szczególnie do oceny ofert negocjacyjnych w słabo ustrukturyzowanych problemach negocjacyjnych, tzn. w sytuacji, gdy informacja o wartościach opcji jest nieprecyzyjna, niedokładna lub określona za pomocą wyrażen werbalnych, a także gdy ocena wariantów porozumienia wymaga uwzględnienia danych z różnych źródeł i o różnym charakterze.

Prezentowany przykład, oparty na danych umownych, nie wykorzystuje wszystkich potencjalnych zastosowań metod: FSAW i FTOPSIS opartych na OFN do analizy



procesu negocjacji i służy jedynie jako jej ilustracja<sup>6</sup>. W pracy rozważamy problem negocjacji kontraktu menedżerskiego między firmą a potencjalnym dyrektorem (por. Wachowicz, 2010). Budujemy system oceny kontraktu kandydata na dyrektora ze względu na trzy kwestie:  $f_1$  – wysokość zarobków [w PLN],  $f_2$  – pensum urlopu gwarantowanego [w dniach] oraz  $f_3$  – warunki ubezpieczenia na życie w ramach kontraktu. Przyjmujemy, że obszary negocjacji dla poszczególnych kwestii mają postać:  $f_1$  <10 000 PLN, 24 000 PLN> dla  $f_1$ ; <20,37> dla  $f_2$ ; {pracownik, 20% pracownik, 80% pracodawca; 50% pracownik, 50% pracodawca; 80% pracownik, 20% pracodawca; pracodawca} dla  $f_3$ . Dla kandydata na dyrektora kwestie  $f_1$ ,  $f_2$  są typu zysk,  $f_3$  jest kwestią opisaną werbalnie.

**Przypadek 1** (skierowane liczby rozmyte). Przyjmujemy, że kandydat na dyrektora zdecydował się na werbalną ocenę kwestii przy wykorzystaniu skali lingwistycznej (tabela 2). Kandydat na dyrektora jest w stanie zaakceptować pewne ustępstwa blisko opcji opisujących werbalnie warunki ubezpieczenia np. traktując opcję ubezpieczenia: 50% pracownik, 50% pracodawca jako Q; warunek 60% pracownik, 60% pracodawca ocenia jako prawie Q (będziemy go oznaczać jako L. Q), a 40% pracownik, 60% pracodawca ocenia jako trochę lepszy niż Q oznaczając M. Q. Przyjmujemy, że wektor określający istotność kwestii ma postać:  $w = [0,5; 0,3; 0,2]$ . Mechanizm ewaluacji opcji negocjacyjnych kandydata na dyrektora zawarto w tabeli 3.

Tabela 3.

Mechanizm ewaluacji opcji negocjacyjnych przez kandydata na dyrektora z wykorzystaniem skali lingwistycznej

Zarobki	Skala lingwistyczna	Urlop	Skala lingwistyczna	Ubezpieczenie na życie	Skala lingwistyczna
<10–12)	<b>BS</b>	<20–21)	<b>BS</b>	pracownik	<b>BS</b>
<12–12,5)	<i>L. BS</i>	22	<i>L. BS</i>	90% pracownik, 10% pracodawca	<i>L. BS</i>
<12,5–13)	<i>M. S</i>	23	<i>M. S</i>	85% pracownik, 15% pracodawca	<i>M. S</i>
<13–15)	<b>S</b>	<24–25)	<b>S</b>	80% pracownik, 20% pracodawca	<b>S</b>
<15–15,5)	<i>L. S</i>	26	<i>L. S</i>	70% pracownik, 30% pracodawca	<i>L. S</i>
<15,5–16)	<i>M. SR</i>	27	<i>M. SR</i>	60% pracownik, 40% pracodawca	<i>M. SR</i>

<sup>6</sup> Szerzej o zastosowaniach metod wielokryterialnych do analizy procesu negocjacji np. Salo, Hämmäläinen (2010), Roszkowska, Wachowicz (2016), fuzzy TOPSIS (Roszkowska, Wachowicz, 2015a), fuzzy SAW (Roszkowska, 2014).

Tabela 3. (cd.)

Zarobki	Skala lingwistyczna	Urlop	Skala lingwistyczna	Ubezpieczenie na życie	Skala lingwistyczna
<16–18)	<b>SR</b>	<28–29)	<b>SR</b>	50% pracownik, 50% pracodawca	<b>SR</b>
<18–18,5)	<i>L.SR</i>	30	<i>L.SR</i>	40% pracownik, 60% pracodawca	<i>L.SR</i>
<18,5–19)	<i>M.D</i>	31	<i>M.D</i>	30% pracownik, 70% pracodawca	<i>M.D</i>
<19–21)	<b>D</b>	<32–33)	<b>D</b>	20% pracownik, 80% pracodawca	<b>D</b>
<21–21,5)	<i>L.D</i>	34	<i>L.D</i>	15% pracownik, 85% pracodawca	<i>L.D</i>
<21,5–22)	<i>M.BD</i>	35	<i>M.BD</i>	50% pracownik, 50% pracodawca	<b>SR</b>
<22–24>	<b>BD</b>	<36–37)	<b>BD</b>	pracodawca	<b>BD</b>

Źródło: opracowanie własne.

Przyjmujemy następnie, że kandydat na dyrektora ocenia dziesięć wstępnie wybranych ofert. Oferty te wraz z ich ocenami lingwistycznymi zaprezentowano w tabeli 4. W kolejnym kroku analizy dokonano transformacji ocen lingwistycznych na skierowane trapezowe liczby rozmyte zgodnie z przyjętą skalą lingwistyczną (26), a następnie dokonano agregacji ocen cząstkowych za pomocą rozmytej metody FSAW oraz FTOPSIS.

Tabela 4.

Ocena wybranych ofert kontraktu menadżerskiego

Oferta	Zarobki [PLN]		Urlop [dni]		Ubezpieczenie na życie	
	Opcja	Ocena lingwistyczna	Opcja	Ocena lingwistyczna	Opcja	Ocena lingwistyczna
A <sub>1</sub>	11	<b>BS</b>	36	<b>BD</b>	90% pracownik, 10% pracodawca	<i>L.BS</i>
A <sub>2</sub>	13	<b>S</b>	30	<i>L.SR</i>	pracodawca	<b>BD</b>
A <sub>3</sub>	13	<b>S</b>	30	<i>L.SR</i>	40% pracownik, 60% pracodawca	<i>L.SR</i>
A <sub>4</sub>	14	<b>S</b>	30	<i>L.SR</i>	30% pracownik, 70% pracodawca	<i>M.D</i>
A <sub>5</sub>	14	<b>S</b>	31	<i>M.D</i>	40% pracownik, 60% pracodawca	<i>L.SR</i>

Tabela 4. (cd.)

Oferta	Zarobki [PLN]		Urlop [dni]		Ubezpieczenie na życie	
	Opcja	Ocena lingwistyczna	Opcja	Ocena lingwistyczna	Opcja	Ocena lingwistyczna
A <sub>6</sub>	14	<b>S</b>	31	<i>M. D</i>	30% pracownik, 70% pracodawca	<i>M. D</i>
A <sub>7</sub>	17	<b>SR</b>	26	<i>L. S</i>	40% pracownik, 60% pracodawca	<i>L. SR</i>
A <sub>8</sub>	18,5	<i>M. D</i>	24	<b>S</b>	85% pracownik, 15% pracodawca	<i>M. S</i>
A <sub>9</sub>	20	<b>D</b>	24	<b>S</b>	50% pracownik, 50% pracodawca	<b>SR</b>
A <sub>10</sub>	22	<b>BD</b>	20	<b>BS</b>	pracownik	<b>BS</b>

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5 zawiera reprezentację ofert za pomocą skierowanych trapezowych liczb rozmytych oraz ich ocenę otrzymaną za pomocą metody FSAW (por. (27)).

Tabela 5.

Ewaluacja ofert za pomocą skierowanych liczb rozmytych oraz ocena ofert wyznaczona metodą FSAW

Oferta	Zarobki	Urlop	Ubezpieczenie	FSAW(A <sub>i</sub> )
A <sub>1</sub>	$\vec{Tr}(1; 1; 1; 1)$	$\vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$	$\vec{Tr}(1; 1; 1,5; 2)$	$\vec{Tr}(2,2; 2,2; 2,3; 2,4)$
A <sub>2</sub>	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$	$\vec{Tr}(2,9; 2,9; 3,05; 3,2)$
A <sub>3</sub>	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(2,5; 2,5; 2,75; 3,0)$
A <sub>4</sub>	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$	$\vec{Tr}(2,7; 2,7; 2,75; 2,8)$
A <sub>5</sub>	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$	$\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(2,8; 2,8; 2,75; 2,7)$
A <sub>6</sub>	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$	$\vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$	$\vec{Tr}(3,0; 3,0; 2,75; 2,5)$
A <sub>7</sub>	$\vec{Tr}(3; 3; 3; 3)$	$\vec{Tr}(2; 2; 2,5; 3)$	$\vec{Tr}(3; 3; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(2,7; 2,7; 2,95; 3,2)$
A <sub>8</sub>	$\vec{Tr}(4; 4; 3,5; 3)$	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(3; 3; 2,5; 2)$	$\vec{Tr}(3,2; 3,2; 2,85; 2,5)$
A <sub>9</sub>	$\vec{Tr}(4; 4; 4; 4)$	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(3; 3; 3; 3)$	$\vec{Tr}(3,2; 3,2; 3,2; 3,2)$
A <sub>10</sub>	$\vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$	$\vec{Tr}(1; 1; 1; 1)$	$\vec{Tr}(1; 1; 1; 1)$	$\vec{Tr}(3,0; 3,0; 3,0; 3,0)$

Źródło: opracowanie własne.

Ocenę i ranking ofert otrzymanych metodą FSAW przy wykorzystaniu metod wyostrzania (18)–(20) zawarto w tabeli 6.

Tabela 6.

Ocena i ranking ofert otrzymanych metodą FSAW przy wykorzystaniu różnych metod wyostrzania (WM dla  $\lambda = 0,1$ )

Oferta	FM	Ranga	LM	Ranga	MM	Ranga	WM ( $\lambda = 0,1$ )	Ranga	CG	Ranga	GM	Ranga
A <sub>1</sub>	2,20	10	2,30	10	2,25	10	2,29	10	2,28	10	2,27	10
A <sub>2</sub>	2,90	5	3,05	2	2,98	4	3,04	2	3,02	2	3,00	2
A <sub>3</sub>	2,50	9	2,75	6	2,63	9	2,73	9	2,69	9	2,67	9
A <sub>4</sub>	2,70	7	2,75	6	2,73	8	2,75	8	2,74	8	2,73	8
A <sub>5</sub>	2,80	6	2,75	6	2,78	7	2,76	7	2,76	7	2,77	7
A <sub>6</sub>	3,00	3	2,75	6	2,88	5	2,78	6	2,81	6	2,83	6
A <sub>7</sub>	2,70	7	2,95	4	2,83	6	2,93	4	2,89	5	2,87	5
A <sub>8</sub>	3,20	1	2,85	5	3,03	2	2,89	5	2,93	4	2,97	4
A <sub>9</sub>	3,20	1	3,20	1	3,20	1	3,20	1	3,20	1	3,20	1
A <sub>10</sub>	3,00	3	3,00	3	3,00	3	3,00	3	3,00	3	3,00	2

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że wybór techniki wyostrzania wymaga od decydenta pewnego kompromisu pomiędzy stratą informacji zawartych w wielkościach rozmytych a niemożnością podjęcia decyzji. Stąd wybór ten powinien być przemyślany i dokonany z uwzględnieniem zarówno własności poszczególnych formuł jak i preferencji decydenta. W naszym przypadku, niezależnie od wyboru metody wyostrzania najlepszą ofertą okazała się oferta A<sub>9</sub>, najgorszą oferta A<sub>1</sub>.

Ranking ofert otrzymany przy zastosowaniu procedury FTOPSIS (30) zawiera tabela 7.

Tabela 7.

Ocena i ranking ofert otrzymanych metodą FTOPSIS (przypadek 1)

Oferta	$d(A_i, FPIS)$	$d(A_i, FNIS)$	$FTOPSIS(A_i)$	Ranga
A <sub>1</sub>	5,459	2,624	0,325	10
A <sub>2</sub>	4,006	4,047	0,503	2
A <sub>3</sub>	4,677	3,411	0,422	9
A <sub>4</sub>	4,581	3,510	0,434	8
A <sub>5</sub>	4,533	3,559	0,440	7
A <sub>6</sub>	4,436	3,658	0,452	6

Tabela 7. (cd.)

Oferta	$d(A_i, FPIS)$	$d(A_i, FNIS)$	$FTOPSIS(A_i)$	Ranga
A <sub>7</sub>	4,265	3,826	0,473	5
A <sub>8</sub>	4,201	3,928	0,483	4
A <sub>9</sub>	3,600	4,400	0,550	1
A <sub>10</sub>	4,000	4,000	0,500	3

Źródło: opracowanie własne.

Także i w przypadku metody FTOPSIS najlepszą ofertą okazała się oferta A<sub>9</sub>, najgorszą A<sub>1</sub>. Zaletą metody FTOPSIS jest możliwość oceny odległości analizowanej oferty od oferty idealnej. Wartość wskaźnika 0,555 wskazuje, że oferta A<sub>9</sub> chociaż najlepsza spośród 10 ocenianych, jest jednak daleka od oferty idealnej, której wartość wynosi 1.

**Przypadek 2** (liczby rozmyte). Załóżmy teraz, że kandydat na dyrektora stosując werbalną ocenę opcji stosuje uproszczoną skalę werbalną opartą na liczbach rozmytych. Przyjmujemy, że obie oceny werbalne *trochę mniej niż j* reprezentowaną przez skierowaną liczbę rozmytą  $\vec{X}_{Lj} = \vec{Tr}(j; j; j - 0,5; j - 1)$  oraz *trochę więcej niż j - 1* reprezentowaną przez skierowaną liczbę rozmytą  $\vec{Tr}(j - 1; j - 1; j - 0,5; j)$  zastępowane są oceną pomiędzy  $j - 1$  oraz  $j$ , reprezentowaną przez skierowaną liczbę rozmytą postaci  $\vec{Tr}(j - 1; j + 0,5; j + 0,5; j)$  (będącą liczbą rozmytą w klasycznym ujęciu). Wówczas rozszerzona 5-skala numeryczna oraz lingwistyczna oparta na liczbach rozmytych ma postać:

$$SL = \{\vec{X}_j; j = 1, \dots, 5\} \cup \{\vec{X}_{P:j-1,j}; j = 2, \dots, 5\}, \tag{34}$$

gdzie:  $\vec{X}_j = \vec{Tr}(j; j; j; j)$ ,  $\vec{X}_{P:j-1,j} = \vec{Tr}(j - 1; j - 0,5; j - 0,5; j)$ .

Tabela 8 zawiera reprezentację ofert za pomocą trapezowych liczb rozmytych wyznaczonych w oparciu o skalę (34) oraz ich ocenę otrzymaną za pomocą metody FSAW (por. (29)).

Tabela 8.

Ewaluacja ofert za pomocą liczb rozmytych oraz ocena i ranking ofert wyznaczona metodą FSAW (przypadek 2)

Oferta	Zarobki	Urlop	Ubezpieczenie	$FSAW(A_i)$	W*	Ranga
A <sub>1</sub>	$\vec{Tr}(1; 1; 1; 1)$	$\vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$	$\vec{Tr}(1; 1,5; 1,5; 2)$	$\vec{Tr}(2,2; 2,3; 2,3; 2,4)$	2,30	10
A <sub>2</sub>	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$	$\vec{Tr}(2,9; 3,05; 3,05; 3,2)$	3,05	2
A <sub>3</sub>	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(2,5; 2,75; 2,75; 3,0)$	2,75	6

Tabela 8. (cd.)

Oferta	Zarobki	Urlop	Ubezpieczenie	$FSAW(A_i)$	$W^*$	Ranga
A <sub>4</sub>	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(2,5; 2,75; 2,75; 3,0)$	2,75	6
A <sub>5</sub>	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(2,5; 2,75; 2,75; 3,0)$	2,75	6
A <sub>6</sub>	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(2,5; 2,75; 2,75; 3,0)$	2,75	6
A <sub>7</sub>	$\vec{Tr}(3; 3; 3; 3)$	$\vec{Tr}(2; 2,5; 2,5; 3)$	$\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(2,7; 2,95; 2,95; 3,2)$	2,95	4
A <sub>8</sub>	$\vec{Tr}(3; 3,5; 3,5; 4)$	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(2; 2,5; 2,5; 3)$	$\vec{Tr}(2,5; 2,85; 2,85; 3,2)$	2,85	5
A <sub>9</sub>	$\vec{Tr}(4; 4; 4; 4)$	$\vec{Tr}(2; 2; 2; 2)$	$\vec{Tr}(3; 3; 3; 3)$	$\vec{Tr}(3,2; 3,2; 3,2; 3,2)$	3,20	1
A <sub>10</sub>	$\vec{Tr}(5; 5; 5; 5)$	$\vec{Tr}(1; 1; 1; 1)$	$\vec{Tr}(1; 1; 1; 1)$	$\vec{Tr}(3,0; 3,0; 3,0; 3,0)$	3,00	3

\*  $W \in \{FOM, LM, MN, WM \lambda\}$ - dowolne, CG, GM}.

Źródło: opracowanie własne.

Ranking ofert otrzymany przy zastosowaniu procedury FTOPSIS (30) zawiera tabela 9.

Tabela 9.

Ocena i ranking ofert otrzymanych metodą FTOPSIS (przypadek 2)

Oferta	$d(A_i, FPIS)$	$d(A_i, FNIS)$	$FTOPSIS(A_i)$	Ranga
A <sub>1</sub>	5,407	2,645	0,328	10
A <sub>2</sub>	3,925	4,115	0,512	2
A <sub>3</sub>	4,541	3,525	0,437	6
A <sub>4</sub>	4,541	3,525	0,437	6
A <sub>5</sub>	4,541	3,525	0,437	6
A <sub>6</sub>	4,541	3,525	0,437	6
A <sub>7</sub>	4,131	3,935	0,488	4
A <sub>8</sub>	4,351	3,741	0,462	5
A <sub>9</sub>	3,600	4,400	0,550	1
A <sub>10</sub>	4,000	4,000	0,500	3

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że skala oparta tylko na liczbach rozmytych jest uboższa, gdyż nie pozwala na rozróżnienie wartości ofert A<sub>3</sub>–A<sub>6</sub> zarówno przy stosowaniu procedury FSAW jak i FTOPSIS. Co więcej, wszystkie metody wyostrzenia dla FSAW prowadzą do takiej samej oceny ofert.

Poniższy przykład wskazuje, że obie metody FSAW oraz FTOPSIS mogą być użytecznym narzędziem do oceny ofert negocjacyjnych ze względu na prostotę obliczeniową, a także łatwość interpretacji otrzymanych wyników. Metody te mogą znaleźć szczególnie zastosowanie w sytuacjach, gdy zagadnienia negocjacyjne są opisane w różny sposób, tj. przez wartości precyzyjne, przybliżone, czy wyrażone werbalnie. Przyjęta w przykładzie skala lingwistyczna rozszerzyła zakres ocen poziomów realizacji kwestii negocjacyjnych, a także umożliwiła, dzięki przyjętemu mechanizmowi niezależną ocenę każdej z ofert, co może być użyteczne w ocenie ofert.

Badania Roszkowska, Wachowicz (2015b) wskazują na liczne problemy związane z procesem tworzenia systemu oceny ofert negocjacyjnych, niewłaściwe operowanie punktami ratingowymi SAW oraz błędne interpretacje ocen tego systemu. Negocjatorzy stosują różne błędy percepcyjne związane z heurystykami, które mogą prowadzić do braku spójności preferencji oraz błędów przy podejmowaniu decyzji. Z drugiej strony decydenci chętnie posługują się ocenami werbalnymi w procesie decyzyjnym, stąd użyteczne wydaje się wykorzystanie metod opartych na zmiennych lingwistycznych do oceny ofert negocjacyjnych.

## 7. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono przykłady wykorzystania skierowanych liczb rozmytych do modelowania decyzji wielokryterialnych. Główne zalety wykorzystania skierowanych liczb rozmytych w problemach decyzyjnych to: możliwość wykonywania działań na *OFN* w sposób podobny do rachunku na liczbach rzeczywistych, reprezentacja typu kryterium przez skierowanie liczby rozmytej, rozszerzenie skali numerycznej oraz lingwistycznej. Niemniej należy też zwrócić uwagę na pewne ograniczenia modelu skierowanych liczb rozmytych (zasygnalizowane także w pracy), a związane z interpretacją tzw. *niewłaściwych* liczb rozmytych, szczególnie w sytuacji wykonywania operacji arytmetycznych (w szczególności, gdy otrzymujemy je podczas wykonywania operacji arytmetycznych na właściwych *OFN*). Problematyka *niewłaściwych skierowanych liczb rozmytych* powinna być zatem przedmiotem dalszych badań, nie tylko w odniesieniu do podejmowania decyzji wielokryterialnych.

## LITERATURA

- Bilgiç T., Türken I. B., (2000), Measurement of Membership Functions: Theoretical and Empirical Work, w: Dubois D., Prade H., (red.), *Fundamental of Fuzzy Sets, The Handbook of Fuzzy Sets*, 7, Kluwer, Dordrecht.
- Chen S. J., Hwang C. L., (1992), *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer Verlag, Berlin.
- Dubois D., Prade H., (1979), Fuzzy Real Algebra: Some Results, *Fuzzy Sets and Systems*, 2 (4), 327–348.
- Dubois D., Prade H., (1980), *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application*, Academic Press, New York.
- Dubois D., Prade H., (1988), *Possibility Theory*, New York, London.

- Górecka D., Roszkowska E., Wachowicz T., (2016), The MARS Approach in the Verbal and Holistic Evaluation of the Negotiation Template, *Group Decision and Negotiation*, 25 (138), 1–40.
- Herrera F., Herrera-Viedma E., (2000), Linguistic Decision Analysis: Steps for Solving Decision Problems under Linguistic Information, *Fuzzy Sets and Systems*, 115, 67–82.
- Kacprzak D., (2010), Skierowane liczby rozmyte w modelowaniu ekonomicznych, *Optimum, Studia Ekonomiczne*, 3, 263–281.
- Kacprzak D., Roszkowska E., (2014), *The Application of Ordered Fuzzy Numbers in the SAW Procedure*, The Sixth Podlasie Conference on Mathematics, czerwiec 1–4, 2014, Białystok.
- Kacprzak D., Roszkowska E., (2016), The Fuzzy Saw and Fuzzy TOPSIS Procedures Based on Ordered Fuzzy Numbers, *Information Sciences*, 369, 564–584.
- Kosiński W., (2006), On Fuzzy Number Calculus, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 16 (1), 51–57.
- Kosiński W., Prokopowicz P., (2004), Algebra liczb rozmytych, *Matematyka Stosowana*, 5 (46), 37–63.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., (2002), *Drawback of Fuzzy Arithmetics – New Intuitions and Propositions*, w: Burczyński T., Cholewa W., Moczulski W., (red.), *Methods of Artificial Intelligence*, Gliwice.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., (2003), Ordered Fuzzy Numbers, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematic*, 52 (3), 327–338.
- Kosiński W., Wilczyńska-Sztyma D., (2010), Defuzzification and Implication within Ordered Fuzzy Numbers, w: *WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence*, Barcelona, Spain, 1073–1079.
- Norwich A. M., Türken I. B., (1998), A Model for the Measurement of Membership and the Consequences of its Empirical Implementation, *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 1–25.
- Piasecki K., (2017), O pewnych modyfikacjach teorii skierowanych liczb rozmytych, *Optimum. Studia Ekonomiczne*, 3 (87), 3–18.
- Prokopowicz P., Pedrycz W., (2015), The Directed Compatibility Between Ordered Fuzzy Numbers – A Base Tool for a Direction Sensitive Fuzzy Information Processing, *Artificial Intelligence and Soft Computing*, 9119, 249–259.
- Roszkowska E., (2014), Ocena ofert negocjacyjnych w słabo ustrukturyzowanych problemach negocjacyjnych z wykorzystaniem rozmytej procedury SAW, *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, 327, 237–247.
- Roszkowska E., Wachowicz T., (2015a), Application of Fuzzy TOPSIS to Scoring the Negotiation Offers in Ill-Structured Negotiation Problems, *European Journal of Operational Research*, 242 (3), 920–932.
- Roszkowska E., Wachowicz T., (2015b), Inaccuracy in Defining Preferences by the Electronic Negotiation System Users, w: Kamiński B., Kersten G., Szapiro T., (red.), *Outlooks and Insights on Group Decision and Negotiation*, GDN 2015, Lecture Notes in Business Information Processing, 218, Springer, Cham.
- Roszkowska E., Wachowicz T., (2016), *Negocjacje: analiza i wspomaganie decyzji*, Warszawa, Wolters Kluwer.
- Salo A., Hämmäläinen R. P., (2010), Multicriteria Decision Analysis in Group Decision Processes, w: Kilgour D. M., Eden C., (red.), *Handbook of Group Decision and Negotiation*, Springer, New York, 269–283.
- Trzaskalik T., (2014), *Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Metody i zastosowania*, PWE.
- Wachowicz T., (2010), Metody i narzędzia wspomaganie fazy prenegocjacyjnej, *Decyzje* 14, 55–84.
- Wilczyńska-Sztyma D., (2010), Direction of Research into Methods of Defuzzification for Ordered Fuzzy Numbers, XII International PhD Workshop OWD 2010.
- Wilczyńska-Sztyma D., (2009), Idea skierowanych liczb rozmytych. Przykłady interpretacji. I International PhD Workshop OWD 2009.
- Yager R. R., Filev D. P., (1994), *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Zadeh L. A., (1965), Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338–353.



Zadeh L. A., (1975), The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, Part I, Information Linguistic Variable, *Expert Systems with Applications*, 36 (2), 3483–3488.  
Zimmermann H. J., (2001), *Fuzzy Set Theory and Applications*, 4th Rev. ed. Boston: Kluwer Academic Publishers.

O MOŻLIWOŚCIACH WYKORZYSTANIA SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH  
DO PODEJMOWANIA DECYZJI WIELOKRYTERIALNYCH

Streszczenie

Celem opracowania jest prezentacja możliwości wykorzystania skierowanych liczb rozmytych (*OFN*) do podejmowania decyzji wielokryterialnych. W pracy przedstawiono przykłady interpretacji *OFN*, propozycje wykorzystania *OFN* w rozmytych metodach wielokryterialnych do reprezentacji typu kryterium oraz wyrażeń lingwistycznych. Omówiono rozmyte procedury SAW oraz TOPSIS oparte na *OFN*, które pozwalają na uwzględnienie niejednoznaczności, nieprecyzyjności oraz opisów werbalnych w ocenie wariantów decyzyjnych. Artykuł ma charakter metodologiczny i może stanowić inspirację do dalszych badań nad zastosowaniem *OFN* w metodach wielokryterialnych.

**Słowa kluczowe:** metody wielokryterialne, skierowane liczby rozmyte, zmienne lingwistyczne, rozmyta SAW, rozmyta TOPSIS

THE APPLICATION ORDERED FUZZY NUMBERS  
TO MULTI-CRITERIA DECISION MAKING

Abstract

The main goal of the paper is presentation some possibilities of application ordered fuzzy numbers in multi-criteria decision making. In the paper we present several examples of interpretation ordering fuzzy numbers, propositions application ordered fuzzy numbers in multi-criteria decision making for representation type of criterion as well verbal description. The fuzzy saw and fuzzy TOPSIS methods based on ordered fuzzy numbers were presented. The paper have a methodological character and can inspire to future research concerning application ordered numbers in multi-criteria decision making.

**Keywords:** multi-criteria decision making, ordered fuzzy numbers, linguistic variables, fuzzy SAW, fuzzy TOPSIS

