

PIOTR SZCZEPOCKI<sup>1</sup>

## O APROKSYMACJACH FUNKCJI PRZEJŚCIA DLA JEDNOWYMIAROWYCH PROCESÓW DYFUZJI

### 1. WPROWADZENIE

Jednowymiarowe procesy dyfuzji są powszechnie stosowane do opisu zjawisk ekonomicznych. Szczególną rolę odgrywają w modelowaniu stóp procentowych. W zagadnieniu tym często wykorzystuje się jednowymiarowe procesy dyfuzji np. proces Coxa–Ingersolla–Rossa. Kluczową rolę w estymacji parametrów procesów dyfuzji stanowią funkcje przejścia. Rozwój teorii finansów prowadzi do użycia co raz bardziej wyrafinowanych procesów dyfuzji, dla których funkcja przejścia w postaci jawnego wzoru jest nieznana.

Celem niniejszego opracowania jest dogłębna analiza metod estymacji parametrów jednowymiarowych procesów dyfuzji opartych o aproksymację funkcji przejścia. W tym celu przeprowadzony został eksperyment symulacyjny składający się z dwóch części. W pierwszym kroku zbadana jest dokładność aproksymacji funkcji gęstości, a w drugim precyzja oszacowań parametrów. W eksperymencie wykorzystano trzy znane i powszechnie wykorzystywane jednowymiarowe procesy dyfuzji. Uzyskane wyniki pozwalają ocenić, która z metod aproksymacji najlepiej przybliżyła funkcję przejścia oraz umożliwia najbardziej dokładne oszacowania parametrów. Choć obecnie rozważa się także modele z zaburzeniami niegaussowskimi, to jednowymiarowe procesy dyfuzji są ciągle stosowane w praktyce i mogą stanowić odniesienie dla bardziej zaawansowanych modeli.

Układ opracowania jest następujący. W części drugiej przedstawione zostały podstawowe założenia teoretyczne zagadnienia estymacji jednowymiarowych procesów dyfuzji. Część trzecia zawiera przegląd najważniejszych metod estymacji opartych o aproksymację funkcji przejścia. Część czwarta to eksperyment symulacyjny. Ostatnia część to podsumowanie i wnioski.

---

<sup>1</sup> Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Katedra Metod Statystycznych, ul. POW 3/5, 90-255 Łódź, Polska, e-mail: szczepocki@op.pl.

## 2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA TEORETYCZNE

Niech  $X_t^2$  będzie jednowymiarowym procesem dyfuzji, czyli procesem stochastycznym spełniającym własność Markowa o ciągłych trajektoriach. Zakładamy, że proces ten spełnia następujące jednorodnie stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = \mu(X_t, \theta)dt + \sigma(X_t, \theta)dW_t, \quad (1)$$

gdzie  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$  jest wektorem parametrów. O funkcjach  $\mu: \mathbb{R} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  i  $\sigma: \mathbb{R} \times \Theta \rightarrow (0, \infty)$  zakładamy, że są znane i dla dowolnego  $\theta \in \Theta$  istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (1).

Zagadnienie estymacji parametrów procesu dyfuzji  $X_t$  polega na znalezieniu wartości wektora parametrów  $\theta$  na podstawie próby liczącej  $n + 1$  obserwacji  $X_0, X_1, \dots, X_n$  pobranej w momentach czasu  $t_0, t_1, \dots, t_n$ . Przyjmujemy, że przyrosty czasu są stałe tj.  $\Delta_i = t_{i+1} - t_i = \Delta$ , dla  $i = 0, \dots, n - 1$ . Założenie to upraszcza rozważania, ale jest dość często stosowane przez wielu autorów (por. Pedersen, 1995a; Aït-Sahalia, 2002; Jensen, Poulsen, 2002; Kostrzewski, 2006). Proces dyfuzji  $X_t$  określa jednoznacznie rodzina warunkowych rozkładów prawdopodobieństwa przejścia procesu  $X_t$  ze stanu  $x$  w momencie  $t_i$  do zbioru  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  w momencie  $t_{i+1}$ , dla  $i = 0, \dots, n - 1$ . Są to rozkłady absolutnie ciągłe o funkcji gęstości  $p_\theta(\cdot | x; \Delta)$ , zwanych funkcjami (gęstościami) przejścia.

Dla próby  $X_0, X_1, \dots, X_n$  otrzymujemy zatem  $n$  funkcji przejścia, na podstawie których można wyznaczyć funkcję wiarygodności próby

$$L_n(\theta) = \prod_{i=0}^{n-1} p_\theta(X_{i+1} | X_i; \Delta) p_\theta(X_0). \quad (2)$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa warunku początkowego  $p_\theta(X_0)$ , z wyjątkiem przypadku, gdy proces  $X_t$  jest stacjonarny, jest nieznaną. Jednakże wraz ze wzrostem liczebności próby maleje udział  $p_\theta(X_0)$  w funkcji wiarygodności próby, przyjmuje się zatem, że  $p_\theta(X_0) = 1$  i w konsekwencji pomija w zapisie.

Estymator metody największej wiarygodności wyznacza się maksymalizując funkcję wiarygodności próby (2). Otrzymane w ten sposób estymatory są zgodne i asymptotycznie normalne (dowód dla procesów Markowa można znaleźć w pracy Billingsleya (1961, za Kostrzewski, 2008).

W większości zagadnień postać funkcji gęstości przejścia jest nieznaną, np. dla klasy modeli CKLS (Chan i inni, 1992) postać gęstości jest znana tylko dla dwóch szczególnych przypadków (modelu Coxa-Ingersolla-Rossa i Ornsteina-Uhlenbecka). Podobnie nie można wyznaczyć funkcji przejścia dla klasy nieliniowych modeli wprowadzonych przez Aït-Sahalię (1999). W przypadku gdy funkcja gęstości jest nieznaną,

<sup>2</sup>  $X_t$  jest skróconą notacją. Pełny zapis to  $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ .

nie można również podać postaci funkcji wiarygodności z próby i wyznaczyć estymatorów parametrów metodą największej wiarygodności. Powstało wiele metod estymacji parametrów w przypadku, gdy funkcja gęstości jest nieznaną. Można je podzielić na dwie kategorie. Do pierwszej zalicza się metody maksymalizacji aproksymacji funkcji wiarygodności próby m.in. dyskretyzację równania różniczkowego (Ozaki, 1992; Elerian, 1998; Shoji, Ozaki, 1998), symulację funkcji przejścia (Pedersen, 1995a; Durham, Gallant, 2002), numeryczne rozwiązanie równania Fockera-Plancka (Jensen, Poulsen, 2002), aproksymacje szeregami funkcyjnymi (Aït-Sahalia, 2002, 2008). Do drugiej kategorii należą modyfikacje uogólnionej metody momentów zaproponowanej przez Hansena (1982). Są to: efektywna metoda momentów (Gallant, Tauchen, 1996), estymacja pośrednia (Gourieroux i inni, 1993) czy metoda momentów spektralnych (Chacko, Vieira, 2003). Równolegle rozwijane jest również podejście bayesowskie (Elerian i inni, 2001; DiPietro, 2001 za Kostrzewski, 2004, 2006). W literaturze przedmiotu można znaleźć także artykuły prezentujące przegląd stosowanych metod (Christensen i inni, 2001 oraz Jensen, Poulsen, 2002). Monografia Kostrzewskiego (2006) szczegółowo omawia metody estymacji parametrów procesów dyfuzji za pomocą aproksymacji funkcji przejścia w kontekście podejścia bayesowskiego. Praca ta zawiera również badania empiryczne przeprowadzone na szeregu stóp procentowych banku centralnego USA oraz na szeregu dziennych wartości indeksu WIG20.

### 3. PRZEGLĄD METOD ESTYMACJI

Najstarszą metodą aproksymacji funkcji przejścia jest dyskretyzacja równania różniczkowego (1). Transformacja ta przekształca równanie różniczkowe na schemat różnicowy, dla którego można otrzymać funkcję wiarygodności i w ten sposób wnioskować o parametrach prawdziwego (ciągłego) procesu. Najprostszą dyskretyzacją jest tak zwany schemat Eulera (lub Eulera-Maruyama) polegający na przejściu na pierwsze różnice. Wówczas równanie (1) zastępuje równanie

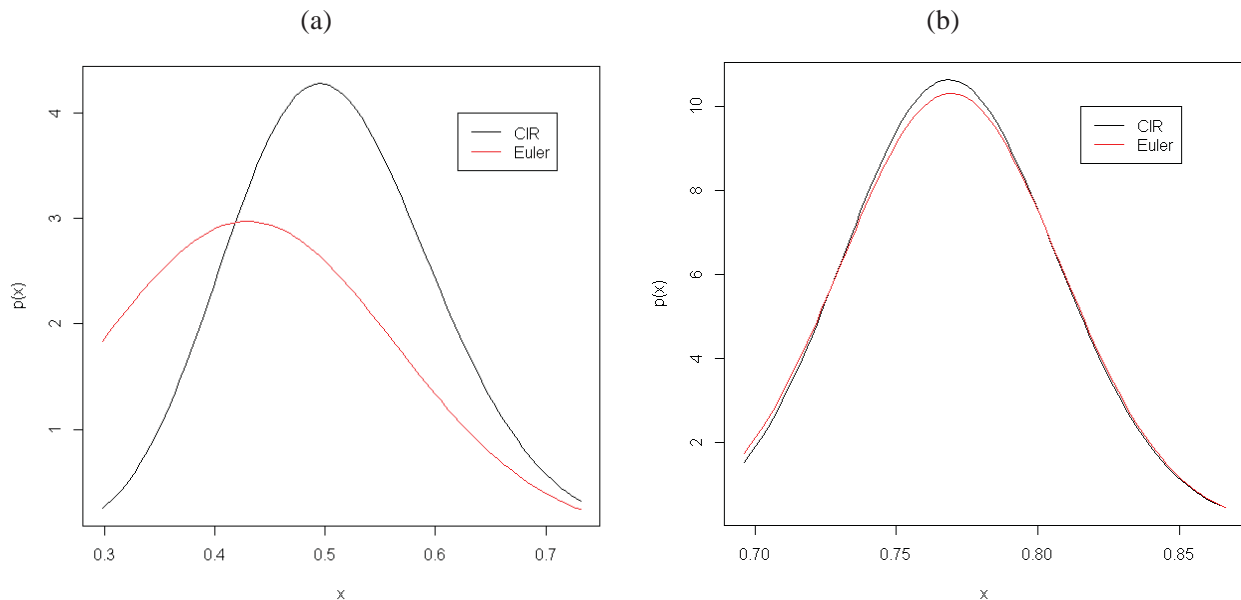
$$X_{t+\Delta} - X_t = \mu(X_t, \theta)\Delta + \sigma(X_t, \theta)(W_{t+\Delta} - W_t). \quad (3)$$

Z własności procesu Wienera wynika, że  $(W_{t+\Delta} - W_t) \sim N(0, \sqrt{\Delta})$ , zatem przyrosty  $(X_{t+\Delta} - X_t)$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną  $\mu(X_t, \theta)\Delta$  i wariancją  $\sigma^2(X_t, \theta)\Delta$ . Stąd wynika, że gęstość przejścia aproksymacji schematu Eulera dana zatem jest wzorem

$$p_{\theta}^{Euler}(y|x; \Delta) = \frac{1}{\sigma(x, \theta)\sqrt{2\pi\Delta}} \exp\left\{-\frac{(y-x-\mu(X_t, \theta)\Delta)^2}{2\sigma^2(X_t, \theta)\Delta}\right\}. \quad (4)$$

Można zatem wyznaczyć funkcję wiarygodności aproksymacji, a następnie estymator metody największej wiarygodności wektora parametrów  $\theta$ . Intuicyjnie, taka metoda powinna dawać dobre wyniki dla dostatecznie małych  $\Delta$ , ponieważ różnice będą

dobrym przybliżeniem ilorazu różnicowego (por. rysunek 1). Procedura ta prowadzi jednak do estymatorów obciążonych i niezgodnych (Florens-Zmirou, 1989; Broze i inni, 1998).



Rysunek 1. Gęstość przejścia  $p_{\theta}(x|x_i; \Delta)$  dla procesu Coxa–Ingersolla–Rossa (24) oraz jego aproksymacja przy pomocy dyskretyzacji Eulera, dla wartości początkowej  $x_i = 0,8$  oraz parametrów:  $\theta_1 = 0,03$ ,  $\theta_2 = 0,5$ ,  $\theta_3 = 0,15$  oraz (a)  $\Delta = 1$  (b)  $\Delta = 1/12$

Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R (wersja 3.2.1).

Próbowano także innych metod aproksymacji funkcji przejścia wykorzystując wyższy stopień zbieżności (np. schemat Milsteina zaproponowany przez Eleriana, 1998) lub poprzez linearyzację funkcji dryfu (Ozaki, 1992; Shoji, Ozaki, 1998). Autorzy tych metod wykazali większą dokładność proponowanych metod dyskretyzacji w szczególności, gdy długością okresu próbkowania  $\Delta = t_{i+1} - t_i$  jest znaczna. Natomiast właściwości tak otrzymanych estymatorów są ciągle niezadawalające. Estymatory pozostają obciążone i niezgodne (Elarian, 1998). Estymator metody lokalnej linearyzacji jest zgodny tylko w specyficznym sensie: szerokość przedziału czasowego  $[0, T]$  jest stała ( $T = \text{const.}$ ), natomiast wraz ze wzrostem liczby obserwacji maleje okres próbkowania  $\Delta_n = T/n$  (w zwykłym schemacie pobierania obserwacji jest na odwrót:  $\Delta$  jest stałe, a rośnie szerokość przedziału czasowego  $T = \Delta \cdot n$ ) (Shoji, Ozaki, 1998).

Pedersen zaproponował odmienne podejście wykorzystujące w sposób pośredni dyskretyzację – estymację procesów dyfuzji za pomocą symulacji funkcji przejścia. Idea metody symulacji opiera się na tym, aby sztucznie zagęścić podział przedziału czasowego za pomocą nowego okresu próbkowania  $\delta$  ( $\delta \ll \Delta$ ) wprowadzając zmienne losowe nieobserwowalne, dla których aproksymacja funkcji przejścia schematami dyskretyzacji będzie odpowiednio dokładna. Następnie z tak powstałych aproksymacji skonstruować funkcję wiarygodności, na podstawie której można wyznaczyć oszaco-

wania szukanych parametrów. Metoda była później rozwijana przez Eleriana i inni (2001) oraz Durhama, Gallanta (2002).

Ograniczmy rozważania do pojedynczego przedziału czasowego  $[t_i, t_{i+1})$ . Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech  $\delta = \frac{\Delta}{M}$ , gdzie  $M$  jest pewną liczbą naturalną. Stała  $\delta$  wprowadza podział odcinka  $[t_i, t_{i+1})$  na podprzedziały  $t_i = t_{i,0} < t_{i,1} < \dots < t_{i,m} < \dots < t_{i,M} = t_{i+1}$ . Zmienne losowe  $X_{i,1}, \dots, X_{i,M-1}$  są nieobserwowalne<sup>3</sup>. Jedyne realizacje zmiennych  $X_{i,0}$  oraz  $X_{i,M}$  możemy zaobserwować w dostępnej próbie. Przez  $p_\theta^{(M)}(\cdot | x_{i,m}; \delta)$  oznaczymy funkcję przejścia zmiennej losowej  $X_{i,m+1}$  pod warunkiem, że zmienna losowa  $X_{i,m}$  przyjęła wartość  $x_{i,m}$  ( $m = 0, \dots, M-1$ ). Natomiast przez  $p_\theta^{(M)}(\cdot | x_i; \Delta)$  oznaczymy szukaną aproksymację gęstości przejścia  $p_\theta(\cdot | x_i; \Delta)$  zmiennej losowej  $X_{i+1}$  pod warunkiem, że zmienna losowa  $X_i$  przyjmie wartość  $x_i$ , wyznaczoną metodą symulacji. Pedersen wykazał, że

$$\begin{aligned} p_\theta^{(M)}(x | x_i; \Delta) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^{M-1}} p_\theta^{(M)}(x | x_{i,M-1}; \delta) \prod_{i=0}^{M-2} p_\theta^{(M)}(x_{i,m+1} | x_{i,m}; \delta) d\lambda(x_{i,0}, \dots, x_{i,M-2}) = \quad (5) \\ &= E_{P_{\theta, x_i, t_i}} \left[ p_\theta^{(M)}(x | x_{i,M-1}; \delta) \right], \end{aligned}$$

gdzie całka we wzorze (5) jest względem  $(M-1)$ -wymiarowej miary Lebesgue'a. Oznacza to, że  $p_\theta^{(M)}(\cdot | x_i; \Delta)$  można traktować jako wartość oczekiwaną po wszystkich możliwych trajektoriach procesu z przedziału czasowego  $[t_{i,M-1}, t_{i,M})$ , przy czym miara probabilistyczna względem, której wyznaczona jest wartość oczekiwana jest generowana przez prawdopodobieństwo warunkowe, że proces  $X_t$  w momencie czasu  $t_i = t_{i,0}$  był w stanie  $x_i$ . Korzystając z mocnego prawa wielkich liczb Kołmogorowa wartość oczekiwaną można przybliżyć średnią arytmetyczną (dla dostatecznie dużego  $K$ )

$$E_{P_{\theta, x_i, t_i}} \left[ p_\theta^{(M)}(x | x_{i,M-1}; \delta) \right] \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K p_\theta^{(M,k)}(x | x_{i,M-1}; \delta). \quad (6)$$

Można ponadto przyjąć, że gęstości przejścia  $p_\theta^{(M,k)}(\cdot | x_{i,m}; \delta)$  na podprzedziałach są gęstościami przejścia schematu Eulera (co jest wiarygodnym założeniem pamiętając, że  $\delta$  zostało dobrane dostatecznie małe)

$$p_\theta^{(M,k)}(x | x_{i,m}; \delta) = \phi(x; \mu(x_{i,m}, \theta)\delta, \sigma(x_{i,m}, \theta)\sqrt{\delta}), \quad (7)$$

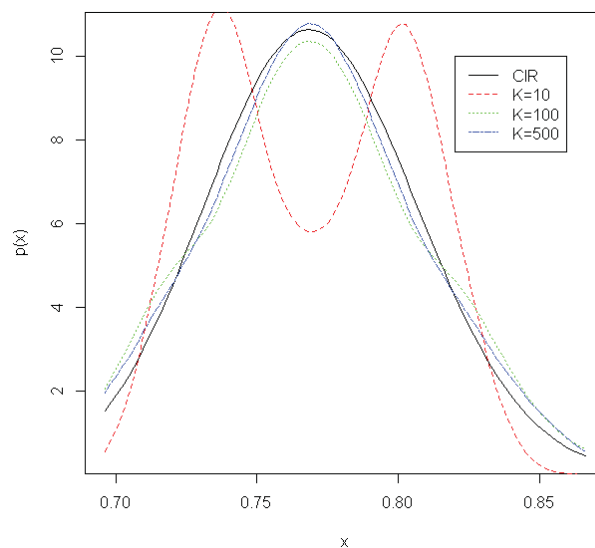
gdzie  $\phi(x; \mu, \sigma)$  oznacza gęstość rozkładu normalnego z parametrami  $\mu$  i  $\sigma$ .

<sup>3</sup> W literaturze przedmiotu zmienne te są nazywane również zmiennymi pośrednimi, brakującymi, ukrytymi lub pomocniczymi – zob. Kostrzewski (2006, str. 51).



Pedersen (1995a) wykazał, że tak otrzymana aproksymacja jest zbieżna do nieznannej funkcji przejścia w przestrzeni funkcji całkownych  $L^1(\lambda)$ . Co więcej, funkcja wiarygodności skonstruowana na podstawie aproksymacji jest zbieżna do prawdziwej funkcji wiarygodności według prawdopodobieństwa (Pedersen, 1995b).

Wadą tej metody jest to, że wymaga dużej liczby symulacji i odpowiednio gęstego podpodziału, tak aby otrzymać dokładne oszacowanie pojedynczej funkcji przejścia (por. rysunek 2). W celu skonstruowania aproksymacji funkcji wiarygodności należy dokonać  $n$  takich oszacowań funkcji przejścia. W przypadku numerycznego poszukiwania ekstremum lokalnego tak powstałej aproksymacji funkcji wiarygodności należy tą procedurę powtarzać wielokrotnie, co powoduje dużą czasochłonność tej metody.



Rysunek 2. Gęstość przejścia  $p_\theta(x|x_i; \Delta)$  dla procesu Coxa-Ingersolla-Rossa (24) oraz jego aproksymacja przy pomocy metody symulacyjnej Pedersena ( $M = 10$  i  $K \in \{10, 100, 500\}$ ), dla wartości początkowej:  $x_i = 0,8$  oraz parametrów:  $\theta_1 = 0,03$ ,  $\theta_2 = 0,5$ ,  $\theta_3 = 0,15$ ,  $\Delta = 1/12$

Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R (wersja 3.2.1).

Kolejnym ograniczeniem metody symulacji funkcji przejścia zaproponowanej przez Pedersena jest, to, że otrzymanej aproksymacji prawdziwej funkcji wiarygodności próby nie można przedstawić za pomocą wzoru. Utrudnia to zbadanie własności estymatorów powstałych na podstawie takich przybliżeń oraz dalsze zastosowanie w ekonometrii finansowej np. do wyceny instrumentów pochodnych. Znalezienie aproksymacji funkcji wiarygodności próby, która nie tylko dawałaby dokładne oszacowanie parametrów, ale jednocześnie była wyrażona w postaci jawnych wzorów stało się przedmiotem zainteresowania francuskiego ekonometryka Yacine'a Aït-Sahaliego. Udało się to osiągnąć poprzez rozwijanie gęstości przejścia w szereg funkcyjny względem układu wielomianów Hermite'a (Aït-Sahalia, 2002). Następnie Aït-Sahalia uogólnił otrzymaną metodę na wielowymiarowe procesy dyfuzji (Aït-Sahalia, 2008).

Idea metody jest zbliżona do centralnego twierdzenia granicznego Lindeberga-Levy'ego (CTG). Gdy  $\Delta \rightarrow 0$  (analogicznie dla CTG, gdy  $n \rightarrow \infty$ ) dobrym przybli-

zeniem gęstości przejścia jest gęstość rozkładu normalnego, natomiast w przypadku, gdy  $\Delta$  nie jest bliskie zera (analogicznie dla CTG, gdy  $n$  nie jest dostatecznie duże) należy wykorzystać rozwinięcia Grama–Charliera typu A, aby zwiększyć dokładność aproksymacji.

Zastosowanie rozwinięcia Grama–Charliera typu A wymaga, aby rozkład wyjściowej zmiennej był zbliżony do rozkładu normalnego w tym sensie, aby ogony rozkładu były dostatecznie chude. Aït-Sahlia (2002) zaproponował przekształcenie procesu dyfuzji  $X_t$  w proces  $Z_t$ , tak że nowy proces  $Z_t$  ma gęstość  $p_Z$  należącą do klasy gęstości, dla których rozwinięcie Grama–Charliera typu A jest zbieżne. Przekształcenie  $X_t \rightarrow Z_t$  składa się z dwóch przekształceń:  $X_t \rightarrow Y_t$  i  $Y_t \rightarrow Z_t$ . Co ważne, transformacje te są odwracalne, co umożliwia podanie rozwinięcia gęstości  $p_X$ .

Przekształcenie  $X_t \rightarrow Y_t$  to tak zwana transformacja Lampertiego (Aït-Sahalia, 2002)

$$Y = F(X) = \int_{-\infty}^X \frac{du}{\sigma(u, \theta)}. \quad (8)$$

Drugie przekształcenie  $Y \rightarrow Z_t$  jest postaci

$$Z = \frac{Y - y_0}{\Delta^{1/2}}. \quad (9)$$

Transformacje te pozwalają uzyskać proces  $Z_t$ , dla którego gęstość przejścia  $p_Z$  jest na tyle zbliżona do gęstości rozkładu  $N(0,1)$ , że możliwe jest jej rozwinięcie w szereg Grama–Charliera typu A. Wówczas aproksymację rzędu  $J$  gęstości przejścia  $p_Z$  można zapisać w postaci

$$p_Z^J(z|y_0, \Delta, \theta) = \phi(z) \sum_{j=1}^J \eta_Z^{(j)}(z|y_0, \Delta, \theta) H_j(z). \quad (10)$$

Współczynniki  $\eta_Z^{(j)}$  tego rozwinięcia wyznacza się ze wzoru

$$\eta_Z^{(j)}(z|y_0, \Delta, \theta) = \frac{1}{j!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_j(z) p_Z(z|y_0, \Delta, \theta) dz. \quad (11)$$

Można zatem wyznaczyć aproksymację funkcji gęstości  $p_X$  rzędu  $J$  wzorem

$$p_X^J(x|x_0, \Delta, \theta) = \sigma(x, \theta)^{-1} \Delta^{-1/2} p_Z^J(\Delta^{-1/2}(F(x) - F(x_0))|y_0, \Delta, \theta). \quad (12)$$

Aproksymacja (12) ma zupełnie odmienne własności niż omawiane wcześniej aproksymacje uzyskane metodą dyskretyzacji czy symulacji. Zbieżność aproksymacji nie uzyskuje się zmniejszając okres próbkowania czy zwiększając liczbę symulacji, tylko poprzez zwiększanie liczby wyrazów w szeregu (10). Pozostaje jeszcze problem

wyznaczenia współczynników  $\eta_Z^{(j)}$  ze wzoru (11). Współczynniki te można otrzymać korzystając z różnych metod m.in. za pomocą całkowania metodą Monte Carlo. Aït-Sahalia (2002) zaproponował rozwinięcie ich w szereg Taylora i przedstawił jawne wzory dla pierwszych sześciu wyrazów tego rozwinięcia dla  $J = 3$ .

Aït-Sahalia zbadał także własności estymatora największej wiarygodności skonstruowanego na podstawie tak powstałej aproksymacji. Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech  $\hat{\theta}_n$  oznacza estymator największej wiarygodności wyznaczony na podstawie prawdziwej (choć najczęściej nieznannej) funkcji wiarygodności  $L_n$ , natomiast  $\hat{\theta}_n^{(j)}$  wyznaczony na podstawie aproksymacji wielomianami Hermite'a rzędu  $J$ . Dla ustalonej liczebności próby  $n$ . Gdy  $J \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\theta}_n^{(j)} \rightarrow \hat{\theta}_n$  (zbieżność wg prawdopodobieństwa  $P_{\theta_0}$ ). Jeżeli  $X_t$  jest stacjonarnym procesem dyfuzji, to

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \rightarrow N(0, i(\theta_0)^{-1}), \quad (13)$$

gdzie zbieżność jest według rozkładu, a  $i(\theta_0)^{-1}$  jest odwrotnością informacji Fishera modelu. Oznacza to, że estymator największej wiarygodności jest estymatorem efektywnym, ponieważ  $i(\theta_0)^{-1}$  jest najmniejszą możliwą asymptotyczną wariancją pośród wszystkich zgodnych i asymptotycznie normalnych estymatorów  $\theta_0$ .

Najbardziej bezpośrednią metodą aproksymacji funkcji przejścia polega na numerycznym rozwiązaniu równania Fokkera-Plancka znanym również jako prospektywne równanie Kołmogorowa (Kołmogorow, 1931)

$$\frac{\partial p(x|x_0, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^2(x)p(x|x_0, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \mu(x)p(x|x_0, t)}{\partial x}. \quad (14)$$

Jest to równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu, które łączy gęstość przejścia z funkcjami dryfu i dyfuzji. Równanie (14) jest uzupełnione przez odpowiednie warunki początkowo-brzegowe. Oznaczmy przez  $D_X = (\underline{x}, \bar{x})$  dziedzinę procesu  $X_t$ . Załóżmy, że w momencie  $t_i$  proces przyjmuje wartość  $x_0$ . Wówczas warunek początkowy jest postaci

$$p(x|x_0, t) = \delta(x - x_0), \quad (15)$$

gdzie  $\delta$  oznacza deltę Diraca (funkcję rozkładu gęstości prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej z prawdopodobieństwem jeden przyjmującej wartość  $x_0$ ). Warunek brzegowy powinien zapewniać zachowanie jednostkowej gęstości prawdopodobieństwa. W tym celu wystarczy założyć, że gęstość prawdopodobieństwa nie przechodzi przez brzeg zbioru  $D_X$

$$\lim_{x \rightarrow \underline{x}^+} \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma^2(x)p(x|x_0, t)}{\partial x} - \mu(x)p(x|x_0, t) = 0, \quad (16)$$



$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma^2(x) p(x|x_0, t)}{\partial x} - \mu(x) p(x|x_0, t) = 0. \quad (17)$$

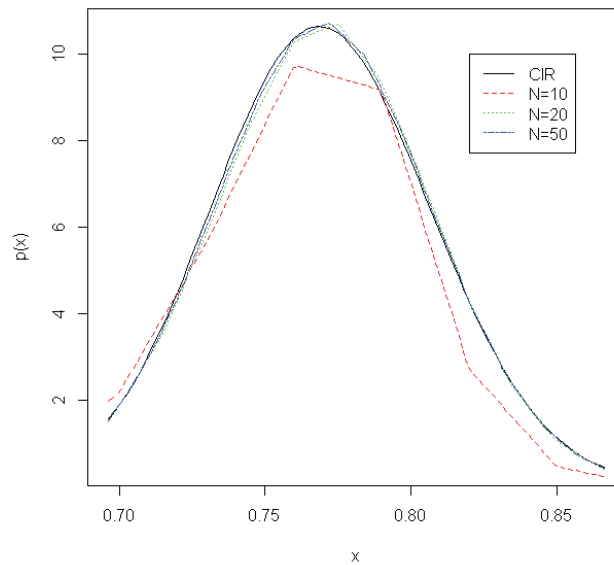
Postać analityczna rozwiązania równania Fokkera-Plancka jest znana tylko w nielicznych przypadkach. Można je jednak próbować rozwiązać numerycznie. Pierwszy takie podejście w celu wyznaczenia estymatora największej wiarygodności zaproponował Lo (1988). Jednakże dopiero 10 lat później pojawiła pierwsza praca mająca na celu implementację tej metody. Hurn, Lindsay (1998) wykorzystali metodę spektralnej aproksymacji. Cztery lata później Jensen, Poulsen (2002) zaproponowali wykorzystanie metody skończonych różnic. Jest to jedna z najbardziej znanych metod numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych.

Metoda skończonych różnic polega na dyskretyzacji dziedziny procesu  $D_X = (\underline{x}, \bar{x})$  na  $N$  jednorodnych przedziałów długości  $\Delta_x = \frac{(\bar{x} - \underline{x})}{N}$  oraz czasu na  $M$  jednorodnych przedziałów długości  $\Delta_t = \frac{t_{i+1} - t_i}{M}$ . Węzły siatki podziału oznaczmy przez  $x_s = \underline{x} + s\Delta_x$ , gdzie  $s$  jest liczbą całkowitą spełniającą nierówności  $0 \leq s \leq N$ , warstwy czasu natomiast przez  $t_{i,q} = t_i + q\Delta_t$ , gdzie  $q$  jest liczbą całkowitą spełniającą nierówności  $0 \leq q \leq M$ .

Wówczas możemy przyjąć następującą aproksymację równania Fokkera-Plancka

$$\begin{aligned} & -r(\sigma_{s-1}^2 + \mu_{s-1}\Delta_x)p_{s-1}^{(q+1)} + 2(2 + r\sigma_s^2)p_s^{(q+1)} - r(\sigma_{s+1}^2 + \mu_{s+1}\Delta_x)p_{s+1}^{(q+1)} = \\ & = r(\sigma_{s-1}^2 + \mu_{s-1}\Delta_x)p_{s-1}^{(q)} + 2(2 - r\sigma_s^2)p_s^{(q)} - r(\sigma_{s+1}^2 - \mu_{s+1}\Delta_x)p_{s+1}^{(q)}, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie  $r = \frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}$ . Równania postaci (18) dla  $s = 0, \dots, N$  tworzą układ równań opisujących ewolucję gęstości przejścia od momentu czasu  $t_{i,q}$  do  $t_{i,q+1}$ . Układ ten trzeba uzupełnić o warunki początkowe i brzegowe. Implementacja warunku początkowego w postaci delty Diraca nie jest bezpośrednio możliwe w obrębie metody skończonych różnic. Jensen i Poulsen (2002) sugerują ominięcie tej trudności poprzez specyfikację warunku początkowego w momencie  $t_{i,1} = t_i + \Delta_t$ . Dla dostatecznie małego  $\Delta_t$  można aproksymować funkcję przejścia w momencie  $t_{i,1}$  rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej  $x_0 + \mu(x_0)\Delta_t$  i wariancji  $\sigma^2(x_0)\Delta_t$ .



Rysunek 3. Gęstość przejścia  $p_\theta(x|x_i; \Delta)$  dla procesu Coxa–Ingersolla–Rossa oraz jego aproksymacja przy pomocy numerycznego rozwiązania równania Fokkera-Plancka ( $M = 20$  i  $N \in \{10, 20, 50\}$ ), dla wartości początkowej:  $x_i = 0,8$  oraz parametrów:  $\theta_1 = 0,03$ ,  $\theta_2 = 0,5$ ,  $\theta_3 = 0,15$ ,  $\Delta = 1/12$   
 Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R (wersja 3.2.1).

#### 4. EKSPERYMENT SYMULACYJNY

Przedstawione w poprzednim rozdziale metody zostaną porównane dla trzech procesów dyfuzji, dla których znana jest postać funkcji przejścia:

1) proces Ornsteina–Uhlenbecka (OU)

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 dW_t, \quad (19)$$

2) geometryczny ruch Browna (BS)

$$dX_t = \theta_1 X_t dt + \theta_2 X_t dW_t, \quad (20)$$

3) proces Coxa–Ingersolla–Rossa (CIR)

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 \sqrt{X_t} dW_t. \quad (21)$$

Dla procesu OU funkcja przejścia jest gęstością rozkładu normalnego z wartością oczekiwaną i wariancją równą odpowiednio

$$E[X_{t+\Delta}|X_t = x_0] = x_0 e^{-\theta_2 \Delta} + \frac{\theta_1}{\theta_2} (1 - e^{-\theta_2 \Delta}), \quad D^2[X_{t+\Delta}|X_t = x_0] = \frac{\theta_3^2 (1 - e^{-2\theta_2 \Delta})}{2\theta_2}.$$

Funkcja przejścia geometrycznego ruchu Browna jest gęstością rozkładu log-normalnego

$$p_{\theta}(x|X_t = x_0; \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\theta_2 x \sqrt{\Delta}} \exp \left[ -\frac{(\ln x - \ln x_0 - (\theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2^2 \Delta))^2}{2\theta_2^2 \Delta} \right],$$

natomiast proces CIR ma gęstość daną wzorem

$$p_{\theta}(x|X_t = x_0; \Delta) = c e^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{uv}),$$

gdzie  $c = \frac{2\theta_2}{(1-e^{-\theta_2\Delta})\theta_3^2}$ ,  $q = \frac{2\theta_1}{\theta_3^2} - 1$ ,  $u = cx_0 e^{-\theta_2\Delta}$ ,  $v = cx$ ,

$I_q(2\sqrt{uv})$  to zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu  $q$ .

Eksperyment symulacyjny składa się z dwóch części. Pierwsza ma na celu zbadanie dokładności aproksymacji funkcji gęstości dla trzech opisanych powyżej przykładów. Druga część eksperymentu polega na sprawdzeniu precyzji oszacowań parametrów. W obu częściach przyjęto te same wartości parametrów – dla procesów OU i CIR przyjęto następujące wartości parametrów:  $\theta_1 = 0,03$ ,  $\theta_2 = 0,5$ ,  $\theta_3 = 0,15$ , dla procesu BS natomiast  $\theta_1 = 0,3$ ,  $\theta_2 = 0,5$ . Okres próbkowania  $\Delta = 1/12$  ustalono, tak aby symulować dane miesięczne. Wykorzystano następujące aproksymacje:

- 1) dyskretyzacja Eulera,
- 2) metoda symulacyjna zaproponowana przez Pedersena (Pedersen, 1995a). Przyjęto podział każdego przedziału czasowego na  $M = 10$  podprzedziałów oraz generowano  $K = 100$  symulacji.
- 3) aproksymacja wielomianami Hermite'a (Aït-Sahalia, 2002). Wykorzystano sześć pierwszych wyrazów rozwinięcia.
- 4) numeryczne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka (Jensen, Poulsen, 2002). Przyjęto podział przestrzeni procesu za pomocą  $\Delta_x = 50$  i czasu  $\Delta_t = 20$ .

W pierwszej części eksperymentu dla każdej z trzech gęstości wylosowano punkt początkowy  $x_i$  z przedziału  $(0,1)$ . Następnie wybrano 100 punktów końcowych  $x_{i+1}$  równomiernie rozłożonych. Dla każdego punktu końcowego wyznaczono wartość funkcji gęstości  $p_{\theta}(x_{i+1}|x_i; \Delta)$  oraz aproksymacji. Następnie wyznaczono błędy aproksymacji za pomocą pięciu miar: ME, RMSE, MAE, MPE, MAPE. Eksperyment powtarzano 1000 razy.

W drugiej części aproksymacje zostały wykorzystane do wyznaczenia estymatorów największej wiarygodności parametrów procesów. W tym celu dla każdego z trzech procesów wygenerowano 1000 prób, każda o liczebności 100 obserwacji. Dla każdej z prób wyznaczono numerycznie wartości parametrów maksymalizujące funkcję wiarygodności lub jej aproksymację. Maksimum lokalne funkcji wyznaczano stosując metodę Nelder-Meada zaimplementowaną w pakiecie *optim*<sup>4</sup> programu R (wersja 3.2.1).

<sup>4</sup> <https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/optim.html> (dostęp 3.02.2015).

Otrzymane wyniki dla pierwszej części przedstawiają tabele 1–3. Dla wszystkich trzech procesów najdokładniej gęstość przybliża aproksymacja wielomianami Hermite’a. W szczególności dla geometrycznego ruchu Browna aproksymacja niemal pokrywa gęstość przejścia. Druga najlepsza metoda to numeryczne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka. Dokładność tej metody można zwiększyć zagęszczając podział przestrzeni procesu i czasu (zwiększając  $\Delta_x$  oraz  $\Delta_t$ ). Również dokładność kolejnej metody – symulacyjnej można polepszyć zwiększając stałe M i K. W obu przypadkach wartości zostały dobrane tak, aby dokładność aproksymacji nie powodowała zbyt długiego czasu wyznaczania oszacowań parametrów w drugiej części eksperymentu. Najslabiej wypadła metod dyskretyzacji Eulera.

Tabela 1.

Błędy aproksymacji  $p_\theta(x_{i+1}|x_i; \Delta)$  wyznaczone na podstawie eksperymentu symulacyjnego (gęstość przejścia procesu Ornsteina–Uhlenbecka)

Rodzaj aproksymacji	Miary błędu aproksymacji				
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
Dyskretyzacja Eulera	0,010618	0,1042	0,087999	-2,74592	3,935113
Symulacyjna	-0,05877	0,356205	0,327252	3,929742	8,839776
Wielomianami Hermite’a	0,000089	0,001225	0,000966	-0,013324	0,049384
Numeryczne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka	0,001412	0,006866	0,005379	-0,2818	0,454452

Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R (wersja 3.2.1).

Tabela 2.

Błędy aproksymacji  $p_\theta(x_{i+1}|x_i; \Delta)$  wyznaczone na podstawie eksperymentu symulacyjnego (gęstość przejścia – geometryczny ruch Browna)

Rodzaj aproksymacji	Miary błędu aproksymacji				
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
Dyskretyzacja Eulera	0,00358	1,02752	0,84338	4,77626	18,9660
Symulacyjna	-0,00099	0,45374	0,36733	1,00085	7,72357
Wielomianami Hermite’a	$1 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$-6 \cdot 10^{-9}$	$1,17 \cdot 10^{-7}$
Numeryczne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka	-0,43144	0,70313	0,47536	-16,03251	16,09903

Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R (wersja 3.2.1).

Tabela 3.

Błędy aproksymacji  $p_\theta(x_{i+1}|x_i; \Delta)$  wyznaczone na podstawie eksperymentu symulacyjnego (gęstość przejścia procesu Coxa–Ingersolla–Rossa)

Rodzaj aproksymacji	Miary błędu aproksymacji				
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
Dyskretyzacja Eulera	0,04483	0,60013	0,48855	-3,16941	6,90287
Symulacyjna	0,00252	0,45221	0,37261	0,31589	7,32948
Wielomianami Hermite’a	0,00019	0,00306	0,00248	-0,01746	0,10831
Numeryczne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka	0,00332	0,02636	0,02094	-0,08590	0,34552

Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R (wersja 3.2.1).

Otrzymane wyniki dla drugiej części eksperymentu przedstawiają tabele 4–6. Dla procesów OU i CIR najtrudniejszy do oszacowania okazał się parametr  $\theta_2$ , natomiast najdokładniejsze oszacowania uzyskano dla parametru  $\theta_3$ . Dla procesu BS bardziej dokładność oszacowań dla obu parametrów jest zbliżona. Dla procesów OU i CIR zarówno aproksymacja wielomianami Hermite’a jak oraz numeryczne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka dają oszacowania bliskie tym uzyskanym na podstawie znanej funkcji wiarygodności. Nieco gorzej wypada metoda symulacji. Szczególnie oszacowanie parametru  $\theta_2$  jest zawyżone. Wynik dyskretyzacji Eulera najbardziej różni się od tych uzyskanych na podstawie znanej funkcji wiarygodności. Dla procesu BS najdokładniej wyniki znanej funkcji wiarygodności odtwarza aproksymacja wielomianami Hermite’a. Dobre oszacowanie uzyskała także dyskretyzacja Eulera. Metody numerycznego rozwiązywania równań Fokkera-Plancka i symulacji zawyżały oszacowanie parametru  $\theta_2$ , przy czym metoda Pedersena zawyża również oszacowanie parametru  $\theta_1$ . Najkrótszy czas uzyskania oszacowań parametrów daje metoda dyskretyzacji Eulera, natomiast najdłuższy metoda numerycznego rozwiązywania równań Fokkera-Plancka. W przypadku tej metody szybkość zależy od przyjętego podziału przestrzeni procesu i czasu. Można zwiększyć szybkość metody kosztem dokładności oszacowań. Podobnie jest w przypadku metody symulacji, gdzie także istnieje odwrotna zależność pomiędzy szybkością a dokładnością.



Tabela 4.

Średnie wartości oceny parametrów oraz błąd średniokwadratowy dla procesu Ornsteina–Uhlenbecka na podstawie eksperymentu symulacyjnego

Metoda estymacji	Przeciętna wartość oceny parametru (błąd średniokwadratowy)			Przeciętny czas (w sekundach)
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	
Maksymalizacja znanej funkcji wiarygodności	0,06735 (0,01738)	0,57669 (0,41303)	0,15103 (0,00007)	0,01194
Dyskretyzacja Eulera	0,07948 (0,01178)	0,50769 (0,29242)	0,144358 (0,00007)	0,05150
Symulacyjna	0,06857 (0,01873)	0,63117 (0,62038)	0,17413 (0,00076)	26,30063
Wielomianami Hermite'a	0,06747 (0,01749)	0,57719 (0,41508)	0,15104 (0,00007)	3,23769
Numeryczne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka	0,06721 (0,01736)	0,57625 (0,41233)	0,15011 (0,00006)	56,49738

Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R (wersja 3.2.1).

Tabela 5.

Średnie wartości oceny parametrów oraz błąd średniokwadratowy dla geometrycznego ruchu Browna na podstawie eksperymentu symulacyjnego

Metoda estymacji	Przeciętna wartość oceny parametru (błąd średniokwadratowy)		Przeciętny czas (w sekundach)
	$\theta_1$	$\theta_2$	
Maksymalizacja znanej funkcji wiarygodności	0,29237 (0,03196)	0,49465 (0,00135)	0,00556
Dyskretyzacja Eulera	0,29736 (0,03356)	0,50964 (0,00177)	0,00943
Symulacyjna	0,33739 (0,15509)	0,57921 (0,01704)	10,99244
Wielomianami Hermite'a	0,29237 (0,03196)	0,49465 (0,00134)	1,36206
Numeryczne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka	0,28944 (0,10349)	0,57889 (0,05158)	25,46038

Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R (wersja 3.2.1).

Tabela 6.

Średnie wartości oceny parametrów oraz błąd średniokwadratowy dla procesu Coxa–Ingersolla–Rossa na podstawie eksperymentu symulacyjnego

Metoda estymacji	Przeciętna wartość oceny parametru (błąd średniokwadratowy)			Przeciętny czas (w sekundach)
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	
Maksymalizacja znanej funkcji wiarygodności	0,06003 (0,00229)	0,44306 (0,74968)	0,15084 (0,00011)	0,09637
Dyskretyzacja Eulera	0,05703 (0,00183)	0,42124 (0,60006)	0,14525 (0,00014)	0,05896
Symulacyjna	0,06801 (0,00507)	0,51327 (1,76721)	0,17007 (0,00106)	43,88161
Wielomianami Hermite’a	0,05995 (0,00227)	0,44248 (0,74244)	0,15083 (0,00011)	8,34884
Numeryczne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka	0,06015 (0,00228)	0,44464 (0,74993)	0,15006 (0,00011)	101,0399

Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R (wersja 3.2.1).

## 5. PODSUMOWANIE

W artykule zostały przedstawione i porównane wybrane metody aproksymacji funkcji wiarygodności dla jednowymiarowych jednorodnych procesów dyfuzji. Najdokładniejsze aproksymacje funkcji wiarygodności dają metody rozwijania gęstości przejścia za pomocą szeregów Hermite’a oraz numeryczne rozwiązanie równań Fokkera-Plancka. Metoda zaproponowana przez Aït-Sahalię w eksperymencie symulacyjnym nie tylko miała najmniejszy błąd przy aproksymacji funkcji gęstości, ale także najlepiej przybliżała wartości estymatorów wyznaczone na podstawie prawdziwej funkcji wiarygodności. Zaletą tej metody są dobrze poznane własności tej aproksymacji oraz krótki czas potrzebny do uzyskania estymatorów parametrów. Jedyną wadą metody jest to, że wymaga transformacji Lampertiego badanego procesu, którą nie zawsze można wyznaczyć analitycznie. W takim przypadku alternatywą może być metoda numerycznego rozwiązywania równania Fokkera-Plancka. Metoda ta wymaga większej ilości obliczeń i przez to jest bardziej czasochłonna, ale przy odpowiednio gęstym podziale przestrzeni procesu daje tylko nieznacznie słabszą aproksymację funkcji gęstości. Kolejną metodą jest metoda symulacyjna Pedersena. Choć teoretycznie zbiega do funkcji wiarygodności, to w praktyce trudno uzyskać odpowiednią precyzję aproksymacji. Wymaga bardzo dużej liczby symulacji, aby osiągnąć poziom dokładności nieco lepszy od najslabszej metody aproksymacji – dyskretyzacji Eulera.

Korzystanie z tej ostatniej metody jest uzasadnione tylko, w przypadku, gdy okres próbkowania danych jest stosunkowo niewielki. Wówczas, przy bardzo łatwej implementacji i dużej szybkości daj dobre oszacowania parametrów. Jednak wraz ze wzrostem odstępu czasu pomiędzy obserwacjami maleje dokładność aproksymacji i rośnie obciążenie uzyskanych estymatorów.

## LITERATURA

- Aït-Sahalia Y., (1999), Transition Densities for Interest Rate and Other Nonlinear Diffusions, *The Journal of Finance*, 54 (4), 1361–1395.
- Aït-Sahalia Y., (2002), Maximum Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions: A Closed-form Approximation Approach, *Econometrica*, 70 (1), 223–262.
- Aït-Sahalia Y., (2008), Closed-form Likelihood Expansions for Multivariate Diffusions, *The Annals of Statistics*, 36 (2), 906–937.
- Billingsley P., (1961), *Statistical Inference for Markov Processes* (Vol. 2), Chicago: University of Chicago Press.
- Broze L., Scaillet O., Zakoian J. M., (1998), Quasi-Indirect Inference for Diffusion Processes, *Econometric Theory*, 14 (02), 161–186.
- Chacko G., Viceira L. M., (2003), Spectral GMM Estimation of Continuous-Time Processes, *Journal of Econometrics*, 116 (1), 259–292.
- Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F. A., Sanders A. B., (1992), An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate, *The Journal of Finance*, 47 (3), 1209–1227.
- Christensen B. J., Poulsen R., Sørensen M., (2001), *Optimal Inference for Diffusion Processes with Applications to the Short Rate of Interest*, (No. 102), working paper.
- DiPietro M., (2001), *Bayesian Inference for Discretely Sampled Diffusion Processes with Financial Applications*, praca doktorska, Department of Statistics, Carnegie-Mellon University.
- Durham G. B., Gallant A. R., (2002), Numerical Techniques for Maximum Likelihood Estimation of Continuous-Time Diffusion processes, *Journal of Business & Economic Statistics*, 20 (3), 297–338.
- Elerian O., (1998), A Note on the Existence of a Closed Form Conditional Transition Density for the Milstein Scheme, *Economics Discussion Paper*, W18.
- Elerian O., Chib S., Shephard N., (2001), Likelihood Inference for Discretely Observed Nonlinear Diffusions, *Econometrica*, 959–993.
- Florens-Zmirou D., (1989), Approximate Discrete-Time Schemes for Statistics of Diffusion Processes, *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 20 (4), 547–557.
- Gallant A. R., Tauchen G., (1996), Which Moments to Match?, *Econometric Theory*, 12 (04), 657–681.
- Gourieroux C., Monfort A., Renault E., (1993), Indirect Inference, *Journal of Applied Econometrics*, 8, S85–S85.
- Hansen L. P., (1982), Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1029–1054.
- Hurn A. S., Lindsay K. A., (1999), Estimating the Parameters of Stochastic Differential Equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 48 (4), 373–384.
- Jensen B., Poulsen R., (2002), Transition Densities of Diffusion Processes: Numerical Comparison of Approximation Techniques, *The Journal of Derivatives*, 9 (4), 18–32.
- Kolmogorov A. N., (1931), On Analytical Methods in the Theory of Probability. *Math. Ann*, 104, 415–458.
- Kostrzewski M., (2004), Bayesowska estymacja parametrów dyskretnie obserwowalnych procesów dyfuzji (na przykładzie modelu CIR), *Przegląd Statystyczny*, 3, 129–139.
- Kostrzewski M., (2006), *Bayesowska analiza finansowych szeregów czasowych modelowanych procesami dyfuzji*, AGH Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne.

- Lo A. W., (1988), Maximum Likelihood Estimation of Generalized Itô Processes with Discretely Sampled Data, *Econometric Theory*, 4 (02), 231–247.
- Ozaki T., (1992), A Bridge Between Nonlinear Time Series Models and Nonlinear Stochastic Dynamical Systems: a Local Linearization Approach, *Statistica Sinica*, 2 (1), 113–135.
- Pedersen A. R., (1995a), A New Approach to Maximum Likelihood Estimation for Stochastic Differential Equations Based on Discrete Observations, *Scandinavian Journal of Statistics*, 55–71.
- Pedersen A. R., (1995b), Consistency and Asymptotic Normality of an Approximate Maximum Likelihood Estimator for Discretely Observed Diffusion Processes. *Bernoulli*, 257–279.
- Shoji I., Ozaki T., (1998), Estimation for Nonlinear Stochastic Differential Equations by a Local Linearization Method, *Stochastic Analysis and Applications*, 16 (4), 733–752.

## O APROKSYMACJACH FUNKCJI PRZEJŚCIA DLA JEDNOWYMIAROWYCH PROCESÓW DYFUZJI

### Streszczenie

Metody estymacji parametrów stochastycznych równań różniczkowych dla ciągłych procesów dyfuzji obserwowanych w dyskretnych odstępach czasu można podzielić na dwie kategorie: metody oparte na maksymalizacji funkcji wiarygodności i wykorzystujące uogólnioną metodę momentów. Zazwyczaj nie znamy jednak gęstości przejścia potrzebnej do konstrukcji funkcji wiarygodności, ani odpowiedniej ilości momentów teoretycznych, aby skonstruować odpowiednią liczbę warunków. Dlatego powstało wiele metod, które próbują przybliżyć nieznaną funkcję przejścia. Celem artykułu jest porównanie własności wybranych metod aproksymacji jednowymiarowych jednorodnych procesów dyfuzji.

**Słowa kluczowe:** stochastyczne równania różniczkowe, procesy dyfuzji, estymacja metodą największej wiarygodności

## ON APPROXIMATION OF TRANSITION DENSITY FOR ONE-DIMENSIONAL DIFFUSION PROCESSES

### Abstract

Estimation methods for stochastic differential equations driven by discretely sampled continuous diffusion processes may be split into two categories: maximum likelihood methods and methods based on the general method of moments. Usually, one does not know neither likelihood function nor theoretical moments of diffusion process and cannot construct estimators. Therefore many methods were developed to approximate unknown transition density. The aim of the article is to compare properties of selected approaches, indicate their merits and limitations.

**Keywords:** stochastic differential equations, diffusion processes, maximum likelihood estimation

