PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXII – ZESZYT 2 – 2015

EMIL PANEK[1]

„SILNY" EFEKT MAGISTRALI W MODELU DYNAMIKI EKONOMICZNEJ TYPU GALE'A. ZAGADNIENIE WZROSTU DOCELOWEGO (AUTOPOPRAWKA)

W artykule Panek (2013) sformułowanie lematu 1 jest nieścisłe i wymaga korekty. W konsekwencji w kilku miejscach konieczna jest także korekta dowodu twierdzenia 3. Treść twierdzenia, w tym teza, pozostaje bez zmian. Za powstałe uchybienie przepraszam Czytelników i Redakcję.

Poniżej przedstawiam poprawioną wersję lematu oraz twierdzenia z naniesionymi korektami. Ich zrozumienie wymaga sięgnięcia do oryginalnego tekstu.

* * *

Przy dowodzie „silnego" twierdzenia o magistrali (twierdzenie 3) korzystamy z wynikającej z ciągłości funkcji α następującej własności dopuszczalnych procesów produkcji: Jeżeli struktura nakładów $\frac{x}{\|x\|}$ w procesie $(x,y) \in Z$ jest dostatecznie „bliska" struktury magistralnej $\bar{s}$, wówczas z nakładów tych możliwe jest wytworzenie produkcji $y \in N$ z technologiczną efektywnością dowolnie bliską optymalnej efektywności α_M. Mówi o tym następujący lemat.

□ **Lemat 1**

$$\forall s \in S_{++}(1)\ \exists \sigma(s) \in (0,1]\ \forall \delta \in (0,\alpha_M)\ \exists \varepsilon' > 0$$

$$(\|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \Longrightarrow (s, \sigma(s)\alpha_M \bar{s}) \in V(1) \wedge \alpha(s, \sigma(s)\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta\ ),$$

gdzie: $S_{++}(1) = \{x > 0 \mid \|x\| = 1\}$ oraz $V(1) = \{(x,y) \in Z \mid \|x\| = 1\}$.

[1] Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, Polska, e-mail: emil.panek@ue.poznan.pl.

Dowód. Najpierw pokażemy, że

$$\forall s \in S_{++}(1)\ \exists\, \sigma \in (0,1]\big((s, \sigma\alpha_M \bar{s}) \in V(1)\big). \tag{*}$$

Ponieważ $\bar{s} > 0$, więc $\forall s \in S_{++}(1)\, \exists \lambda(s) = \min\{\lambda | \lambda s \geqq \bar{s}\}$. Oczywiście, $\lambda(s) \geq 1$ (gdyż $\|\bar{s}\| = 1$). Z własności procesu optymalnego (zob. (1), (4)) wynika, że $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) \in V(1) \subset Z$. Wtedy, zważywszy na własność **(III)** przestrzeni produkcyjnej Z, otrzymujemy:

$$(\lambda(s)s,\ \alpha_M \bar{s}) \in Z \ \text{ czyli } \ \big(s, \sigma(s)\alpha_M \bar{s}\big) \in V(1),$$

gdzie $\sigma(s) = \dfrac{1}{\lambda(s)}$ jest ciągłą funkcją z $S_{++}(1)$ do (0,1], $\sigma(\bar{s}) = 1$.

Funkcja α jest nieujemna i ciągła na $V(1)$ oraz

$$\max_{(x,y)\in V(1)} \alpha(x,y) = \alpha_M = \alpha(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}),$$

więc

$$\forall \delta \in (0, \alpha_M) \exists \varepsilon' > 0 (\|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \Rightarrow \alpha(s, \sigma(s)\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta). \tag{**}$$

Z (*), (**) wynika teza lematu. ■

„Silne" twierdzenie o magistrali głosi, że niezależnie od długości horyzontu T wszystkie $(y^0, t_1, \bar{p})$ optymalne procesy wzrostu przebiegają w dowolnie bliskim otoczeniu magistrali N wszędzie za wyjątkiem co najwyżej ich pewnej (skończonej) liczby na początku i pod koniec horyzontu. Im dłuższy jest horyzont gospodarki T, tym dłużej, w środkowej fazie, optymalny proces wzrostu przebiega w bliskim otoczeniu magistrali. Istotną rolę gra warunek **(VI)**.

□ **Twierdzenie 3 („Silne" twierdzenie o magistrali)**

Weźmy $(y^0, t_1, \bar{p})$ optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Jeżeli spełnione są warunki **(I)**–**(VI),** to

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists k \in N \quad \forall t_1 > 2k\ \ \forall t \in \{k, k+1, \ldots, t_1 - k\} \left(\left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| < \varepsilon \right).$$

Dowód. Wybierzmy liczbę $\varepsilon > 0$. Niech liczba $\delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M)$ spełnia warunek (7). Weźmy liczbę $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$ oraz odpowiadającą jej liczbę $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ z lematu. Zgodnie ze „słabym" twierdzeniem o magistrali istnieje taka liczba naturalna $k_{\varepsilon'}$, że jeżeli $t_1 > k_{\varepsilon'}$, to

$$\left\| \frac{y^*(t)}{\left\| y^*(t) \right\|} - \bar{s} \right\| < \varepsilon' \tag{21}$$

dla co najmniej jednego $t \in T = \{0,1,\ldots,t_1\}$. Niech $t_1 > 2k_{\varepsilon'}$ oraz τ_1 będzie pierwszym, a τ_2 ostatnim okresem horyzontu $T = \{0,1,\ldots, t_1\}$, w którym zachodzi warunek (21). W świetle lematu

$$\left(\frac{y^*(\tau_1)}{\left\| y^*(\tau_1) \right\|}, \sigma^* \alpha_M \bar{s}) \right) \in V(1),$$

czyli

$$\left(y^*(\tau_1), \rho\sigma^* \alpha_M \bar{s}) \right) \in Z,$$

gdzie $\sigma^* = \sigma\left(s^*(\tau_1)\right)$, $s^*(\tau_1) = \dfrac{y^*(\tau_1)}{\left\| y^*(\tau_1) \right\|}$, $\rho = \left\| y^*(\tau_1) \right\| > 0$. Wówczas proces

$$\widetilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & dla\ t = 0,1,\ldots,\tau_1, \\ \rho\sigma^* \alpha_M^{t-\tau_1} \bar{s}, & dla\ t = \tau_1 + 1,\ldots,t_1 \end{cases}$$

jest (y^0, t_1) dopuszczalny oraz z definicji optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}, \widetilde{y}(t_1) \rangle = \rho\sigma^* \alpha_M^{t_1-\tau_1} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle. \tag{22}$$

Niech k' będzie liczbą okresów między τ_1, τ_2, w których

$$\left\| \frac{y^*(t)}{\left\| y^*(t) \right\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon.$$

Z (2), (7), (10) otrzymujemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1-\tau_2}\ \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'}\ (\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'}\ \langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle. \tag{23}$$

Łącząc (22), (23) dochodzimy do nierówności

$$\rho\sigma^* \alpha_M^{t_1-\tau_1} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \leq (\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1-\tau_2}\ \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'}\ (\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'}\ \langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle,$$

lub inaczej:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')} \right)^{t_1-\tau_2} \frac{\rho\sigma^* \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle}.$$

Nierówność powyższą, po podstawieniu $s^*(\tau_1) = \dfrac{y^*(\tau_1)}{\left\| y^*(\tau_1) \right\|}$, można zapisać w równoważnej postaci:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')} \right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\sigma^* \langle \overline{p}, \overline{s} \rangle}{\langle \overline{p}, s^*(\tau_1) \rangle}, \tag{24}$$

Zgodnie z lematem:

$$\alpha = \alpha(s^*(\tau_1), \sigma^* \alpha_M \overline{s}) \geq \alpha_M - \delta,$$

zatem $\alpha s^*(\tau_1) \leq \sigma^* \alpha_M \overline{s}$ oraz $(\alpha_M - \delta)\, s^*(\tau_1) \leq \sigma^* \alpha_M \overline{s}$. Wówczas:

$$(\alpha_M - \delta)\, \langle \overline{p}, s^*(\tau_1) \rangle \leq \sigma^* \alpha_M \langle \overline{p}, \overline{s} \rangle,$$

czyli

$$\frac{\sigma^* \langle \overline{p}, \overline{s} \rangle}{\langle \overline{p}, s^*(\tau_1) \rangle} \geq \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M}.$$

Stąd i z (24) dostajemy:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')} \right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M}.$$

Pamiętając, że $0 < \delta(\varepsilon') < \delta(\varepsilon) < \alpha_M$ (gdyż $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ i funkcja δ jest rosnąca; zob. warunek **(VI)**) oraz $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$ i $t_1 - \tau_1 \geq 0$, dochodzimy do nierówności:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'} > \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')} \right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M},$$

czyli $\left(\dfrac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'-1} > 1$ lub (równoważnie) $\left(\alpha_M - \delta(\varepsilon) \right)^{k'-1} > \alpha_M^{k'-1}$.

Jedyną nieujemną liczbą całkowitą spełniającą ten warunek jest $k' = 0$. W charakterze liczby k o której mowa w tezie twierdzenia, można przyjąć $k = k_{\varepsilon'}$. ■

LITERATURA

Panek E., (2013), „Silny” efekt magistrali w modelu dynamiki ekonomicznej typu Gale'a. Zagadnienie wzrostu docelowego, *Przegląd Statystyczny*, 60 (4), 448–458.

„SILNY” EFEKT MAGISTRALI W MODELU DYNAMIKI EKONOMICZNEJ TYPU GALE'A. ZAGADNIENIE WZROSTU DOCELOWEGO (AUTOPOPRAWKA)

Streszczenie

Artykuł zawiera korektę dowodu lematu oraz w konsekwencji „silnego” twierdzenia o magistrali przedstawionych w pracy Panek (2013).

Słowa kluczowe: gospodarka Gale'a, równowaga von Neumanna, magistrala produkcyjna, „silne” twierdzenie o magistrali

"STRONG" TURNPIKE EFFECT IN THE GALE ECONOMIC DYNAMICS MODEL. FINITE STATE GROWTH PROBLEM (AUTHOR'S OWN CORRECTION)

Abstract

The article contains a correction of lemma 1 proof and the consequently "strong" turnpike theorem 3 as presented in the work by Panek (2013).

Keywords: Gale economy, von Neumann equilibrium, production turnpike, "strong" turnpike theorem