PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXII – ZESZYT 2 – 2015

MARCIN TOPOLEWSKI[1]

ANALIZA MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA HIERARCHICZNYCH ESTYMATORÓW WIARYGODNOŚCI WYŻSZEGO RZĘDU W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH

1. WSTĘP

Niniejsza praca poświęcona jest możliwości wykorzystania estymatorów hierarchicznych do szacowania poziomu ryzyka w ubezpieczeniach komunikacyjnych mierzonego, jako indywidualna częstość szkód. Do oceny częstości szkód estymatory hierarchiczne wykorzystują informacje z różnego poziomu zagregowania danych, od danych ogólnych dotyczących całej obserwowanej populacji ubezpieczonych poprzez dane bardziej szczegółowe dotyczące poszczególnych grup, które wyróżnia się z populacji do indywidualnych dotyczących jednostki z określonej grupy. Informacjom z każdego poziomu przypisuje się odpowiednie wiarygodności, czyli wagi, z jakimi wchodzą one do estymatora. W pracy rozpatrywane są estymatory pierwszego i drugiego rzędu[2], co odpowiada wnioskowaniu o indywidualnym poziomie ryzyka jednostki odpowiednio na podstawie danych dla całej populacji i jednostki, oraz danych dla całej populacji, podgrupy i jednostki. W przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych wprowadzenie estymatora hierarchicznego drugiego rzędu jest szczególnie ciekawe, gdyż wiąże się z częściowym odejściem od wnioskowania *a'priori* na rzecz wnioskowania *a'posteriori*.

Celem pracy jest zbadanie możliwości zastosowania estymatorów hierarchicznych wyższego rzędu do oceny częstości szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych. W literaturze przedmiotu brak jest informacji o możliwości wykorzystania estymatorów hierarchicznych rzędu wyższego niż jeden w ubezpieczeniach komunikacyjnych, a niniejsza praca ma stanowić próbę wypełnienia tej luki. Praca ma być przyczynkiem do odpowiedzi na pytanie, czy wykorzystanie estymatorów hierarchicznych drugiego rzędu do oceny indywidualnej częstości szkód ubezpieczonego w ubezpieczeniach komunikacyjnych prowadzi do polepszenia tej oceny.

W rozdziale pierwszym, po krótce przedstawiona została idea metody wiarygodności, a w rozdziale drugim liniowy estymator metody wiarygodności. Rozdział trzeci

[1] Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Instytut Ekonometrii, Zakład Metod Probabilistycznych, ul. Madalińskiego 6/8, 02-513 Warszawa, Polska, e-mail: mtopol@sgh.waw.pl.

[2] Według nazewnictwa stosowanego przez Jewell (1975).

poświęcony jest omówieniu modelu ryzyka i teoretycznego rozkładu liczby szkód, a rozdział czwarty wprowadza hierarchiczny estymator szkodowości drugiego rzędu dla systemu oceny ryzyka opartego o historię liczby szkód. Ostatecznie w rozdziale piątym znajduje się empiryczna część badania oraz wnioski.

2. METODA WIARYGODNOŚCI

W ubezpieczeniach komunikacyjnych powszechnie stosuje się systemy różnicujące wysokość składki zależnie od liczby spowodowanych przez ubezpieczonego szkód. Szacowanie składek *a'posteriori* polega na wykorzystaniu informacji niedostępnej w momencie wstępnej oceny ryzyka podczas zawierania kontraktu ubezpieczeniowego, a ujawniającej się podczas przebiegu kontraktu. W przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych tą nową informacją jest indywidualny przebieg ubezpieczenia, czyli liczba szkód zgłoszonych przez ubezpieczonego w czasie trwania kontraktu ubezpieczeniowego, zwana indywidualną szkodowością. Ponieważ zmiana początkowo obliczonej składki zależy w tym przypadku tylko od liczby szkód a nie od ich wysokości, w analizie systemów oceny ubezpieczonego *a'posteriori*, częstość zgłaszania szkód utożsamia się zwykle ze szkodowością (Lemaire, 1985). Jest to równoznaczne z przyjęciem założenia, że średnia wysokość pojedynczej szkody jest równa jednej jednostce pieniężnej. Jednocześnie podczas szacowania poziomu ryzyka, jakie stanowi dany ubezpieczony pożądane jest wykorzystanie wszystkich dostępnych informacji, czyli danych indywidualnych i zbiorowych. Jest to zgodne z założeniem, że choć ubezpieczeni wykazują zróżnicowanie objawiające się w liczbie zgłoszonych szkód to, ponieważ stanowią zbiorowość tworzącą portfel ubezpieczonych są w pewien sposób do siebie podobni. Estymatorem wykorzystującym te dwa rodzaje informacji, czyli informację indywidualną i zbiorową, jest estymator metody wiarygodności, w literaturze angielskojęzycznej określanej jako *credibility* (Jewell, 1974; Norberg, 1979). W literaturze polskojęzycznej stosowana jest również nazwa „metoda wiarogodności" (Jasiulewicz, 2005). Poziom ryzyka ubezpieczonego jest tu oceniany jako średnia ważona z informacji indywidualnej i zbiorowej, a waga przypisywana informacji indywidualnej jest zwana wiarygodnością. Warto zauważyć, że taki estymator jest jednocześnie estymatorem bayesowskim (Zehnwirth, 1977).

W przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych informację indywidualną stanowi indywidualna szkodowość, a informację zbiorową szkodowość portfela ubezpieczonych. Indywidualna szkodowość ubezpieczonego, który w roku j zgłasza k_j szkód wynosi po n latach

$$\overline{k}_n = \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} k_s, \tag{1}$$

gdzie k jest łączną liczbą szkód zgłoszoną w ciągu n lat. Wówczas poziom ryzyka $\widetilde{k}$, ubezpieczonego, który w ciągu n lat zgłosił k szkód, pochodzącego z portfela, w którym średnia szkodowość wynosi $\overline{k}$ jest określony jako

$$\tilde{k} = z\bar{k}_n + (1 - z)\bar{k}. \tag{2}$$

$\tilde{k}$ jest tu estymatorem wiarygodności (patrz na przykład: Jewell, 1974; Szymańska, 2014). Zależnie od wagi z, jaką przypisuje się danym indywidualnym $\bar{k}_n$, rozróżnia się częściową wiarygodność gdy $z < 1$ lub pełną wiarygodność gdy $z = 1$. Wykorzystanie jedynie danych indywidualnych, czyli pełna wiarygodność wymaga, aby liczba obserwacji n była stosunkowo duża. Przy najczęściej spotykanym poziomie szkodowości $\lambda < 1$ wartość n powinna wynosić kilkaset (Norberg, 1979). Zważywszy, że n jest liczbą lat, które ubezpieczony spędził w portfelu, osiągnięcie tak wysokiej wartości przez n jest niemożliwe. W przypadku stosowania tego typu estymatora należy więc przypisywać danym indywidualnym częściową wiarygodność. Istnieje zatem potrzeba wyznaczenia odpowiednich wag dla danych indywidualnych i zbiorowych.

Powodem wnioskowania o jednostce także na podstawie cech szerszej grupy jest to, że w początkowej fazie obserwacji jednostki, liczba obserwacji jest zbyt mała, aby można było w zadowalający sposób wnioskować na podstawie tylko tych obserwacji o jej częstości szkód. Indywidualna informacja jest wykorzystywana, ale obok informacji dotyczącej zbiorowości, z której pochodzi jednostka.

3. LINIOWY ESTYMATOR WIARYGODNOŚCI

Wygodnym sposobem wyznaczania indywidualnego poziomu ryzyka jest przedstawienie szkodowości, jako liniowej funkcji liczby zgłoszonych szkód. Korzysta się tu z danych indywidualnych (przebieg szkodowości), którym przypisuje się określoną wagę b. Wówczas liniowy estymator indywidualnego poziomu ryzyka ma postać (Norberg, 1979)

$$\tilde{k} = b\bar{k}_n + a. \tag{3}$$

W tym przypadku należy tak dobrać parametry a i b, aby oczekiwany błąd kwadratowy oceny był jak najmniejszy, czyli

$$E\left(K - b\bar{k}_n - a\right)^2 \to \min_{a,b}, \tag{4}$$

gdzie K jest zmienną losową określającą liczbę szkód zgłoszonych przez ubezpieczonego. Przyjmuje się, że zmienna losowa K ma rozkład Poissona z parametrem λ, będącym jednocześnie średnią szkodowością portfela. Biorąc pod uwagę, że dla zmiennej losowej X i stałej c zachodzi

$$E\left(X - c\right)^2 = \mathrm{Var}X + [E(X - c)]^2,$$

wyrażenie (4) jest równoważne wyrażeniu

$$\operatorname{Var}\left(K - b\overline{k}_n\right) + \left[E\left(K - b\overline{k}_n\right) - a\right]^2 \to \min_{a,b}. \tag{5}$$

Drugi czynnik (5) przyjmuje minimalną wartość dla

$$a = E\left(K - b\overline{k}_n\right),$$

co po wykorzystaniu zależności

$$EK = \lambda$$

oraz jako, że ubezpieczeni pochodzą z tego samego portfela, który charakteryzuje parametr λ

$$E(b\overline{k}_n) = bE\overline{k}_n = b\lambda,$$

prowadzi do wyznaczenia a jako

$$a = (1-b)\lambda. \tag{6}$$

Po podstawieniu zamiast parametru l jego oszacowania $\overline{k}$ otrzymuje się

$$a = (1-b)\overline{k}. \tag{7}$$

Minimalizacja pierwszego składnika wyrażenia (5) wymaga zastosowania zależności

$$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}E(X \mid Y) + E\operatorname{Var}(X \mid Y),$$

co daje

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(K - b\overline{k}_n) &= \operatorname{Var}E(K - b\overline{k}_n \mid \lambda) + E\operatorname{Var}(K - b\overline{k}_n \mid \lambda) \\
&= \operatorname{Var}[(1-b)\lambda] + E\operatorname{Var}(b\overline{k}_n \mid \lambda) \\
&= (1-b)^2 \operatorname{Var}\lambda + b^2 E\operatorname{Var}(\overline{k}_n \mid \lambda) \\
&= (1-b)^2 \operatorname{Var}\lambda + b^2 \frac{1}{n} E\operatorname{Var}(k \mid \lambda) \\
&= (1-b)^2 \operatorname{Var}\lambda + b^2 \frac{1}{n} E\lambda \to \min_b .
\end{aligned}$$

Powyższa forma kwadratowa przyjmuje najmniejszą wartość dla

$$b = \frac{n \cdot \operatorname{Var}\lambda}{n \cdot \operatorname{Var}\lambda + E\lambda}, \tag{8}$$

co po podstawieniu

$$\chi = \frac{E\lambda}{Var\lambda} \tag{9}$$

daje

$$b = \frac{n}{n+\chi}. \tag{10}$$

$$a = \left(1 - \frac{n}{n+\chi}\right)\bar{k} = \frac{\chi}{n+\chi}\bar{k}. \tag{11}$$

Ostatecznie oszacowanie ryzyka *a'posteriori* za pomocą estymatora wiarygodności (Zehnwirth, 1979) wynosi

$$\tilde{k} = \frac{n}{n+\chi}\bar{k}_n + \frac{\chi}{n+\chi}\bar{k} \tag{12}$$

lub

$$\tilde{k} = \frac{n}{n+\chi}\bar{k}_n + \left(1 - \frac{n}{n+\chi}\right)\bar{k}. \tag{13}$$

Taki estymator będziemy nazywać estymatorem hierarchicznym pierwszego rzędu (Jewell, 1975). Jednocześnie przyjmując z = b, czyli

$$z = \frac{n}{n+\chi} \tag{14}$$

oraz oczywiście

$$1 - z = 1 - \frac{n}{n+\chi} = \frac{\chi}{n+\chi}. \tag{15}$$

Estymator (12), względnie (13) jest rozwiązaniem problemu niepełnej wiarygodności. Oczywiście, ponieważ

$$\bar{k}_n = \frac{k}{n}$$

oszacowanie to jest estymatorem, w którym poziom ryzyka zależny jest od historii szkodowości ubezpieczonego (k wypadków przez n lat) i średniego poziomu ryzyka w portfelu $\bar{k}$. Jednocześnie wagi z zależne są od czasu n i odwrotności stopnia zróżnicowania szkodowości w portfelu χ. Łatwo można zauważyć, że w miarę wzrostu n rośnie również waga z, co oznacza, że większą wagę przypisuje się informacji indywidualnej. Zatem w miarę upływu czasu o ryzyku jakie stanowi pojedynczy ubezpieczony wnioskuje się uwzględniając w coraz większym stopniu jego indywidualną szkodowość (historię szkodowości). Parametr χ można traktować jako odwrotność wskaźnika zróżnicowania ryzyka w portfelu, czyli czym mniejsza wartość χ, tym większe różnice w ryzyku jakie stanowią poszczególni ubezpieczeni. Ponieważ wraz ze zmniejszaniem się parametru χ rośnie waga z, należy wnioskować, że czym większe zróżnicowanie portfela, tym bardziej wiarygodna staje się ocena na podstawie danych indywidualnych. Jest to zresztą zgodne z przeświadczeniem, że czym bardziej zróżnicowana grupa tym mniej można powiedzieć o jednostce należącej do tej grupy jedynie na podstawie opisu grupy.

Proste przekształcenie estymatora wiarygodności (2) pozwala na ciekawą interpretację oszacowanej szkodowości. Zapisując (2) jako

$$\tilde{k} = z\bar{k}_n + \bar{k} - z\bar{k}, \tag{16}$$

a następnie grupując odpowiednio średnie szkodowości portfela $\bar{k}$ i indywidualne $\bar{k}_n$ otrzymuje się

$$\tilde{k} = \bar{k} - z(\bar{k} - \bar{k}_n). \tag{17}$$

Oznacza to, że oszacowanie ryzyka danego ubezpieczonego zależy do różnicy między szkodowością portfela $\bar{k}$, a jego indywidualną szkodowością $\bar{k}_n$. Jeżeli indywidualna szkodowość jest niższa od szkodowości portfela ($\bar{k} - \bar{k}_n > 0$), oszacowanie poziomu ryzyka danego ubezpieczonego $\tilde{k}$ zostaje zmniejszone o z-tą cześć tej różnicy w stosunku do poziomu ryzyka całego portfela $\bar{k}$. W przeciwnym przypadku, to znaczy, gdy szkodowość indywidualna jest większa od szkodowości portfela ($\bar{k} - \bar{k}_n < 0$), oszacowanie ryzyka danego ubezpieczonego wzrasta o z-tą cześć tej różnicy.

4. ROZKŁADY LICZBY SZKÓD

Zastosowanie przedstawionego w poprzednim punkcie liniowego estymatora wiarygodności wymaga znajomości pewnych parametrów portfela. Średnia szkodowość portfela i średnia indywidualna szkodowość ubezpieczonego jest zwykle łatwa do oszacowania. Nieco więcej problemów sprawia parametr χ mówiący o stopniu zróżnicowania ryzyka w portfelu. Parametr ten może być oszacowany na podstawie analizy danych empirycznych. Należy wówczas oszacować średni poziom indywidualnych wariancji ubezpieczonych oraz wariancję indywidualnych szkodowości. Ponieważ jednak większość metod analizy opiera się na rozkładach teoretycznych i w tym przypadku wykorzystanie takiego modelu wydaje się być w pełni uzasadnione. W przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych przyjmuje się zwykle, że zmienna losowa K określająca liczbę zgłoszonych szkód dana jest mieszanym rozkładem Poissona, z parametrem λ, gdzie rozkładem mieszającym jest rozkład Gamma lub rozkład gaussowski odwrotny (Willmot, 1987). Otrzymuje się wówczas, dla parametru λ określonego rozkładem Gamma, zmienną K określoną rozkładem ujemnym dwumianowym – NB (ang. *Negative Binomial*) z parametrami α, β gdzie

$$E\lambda = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{18}$$

$$\mathrm{Var}\lambda = \frac{\alpha}{\beta^2}, \tag{19}$$

oraz

$$EK = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{20}$$

$$\mathrm{Var}K = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}. \tag{21}$$

A dla parametru λ określonego rozkładem odwrotnym gaussowskim, zmienną K określoną rozkładem PIG (ang. *Poisson Inverse Gaussian*) z parametrami μ, θ gdzie

$$E\lambda = \mu, \tag{22}$$

$$\mathrm{Var}\lambda = \mu\theta, \tag{23}$$

oraz

$$EK = \mu, \tag{24}$$

$$\mathrm{Var}K = \mu + \mu\theta = \mu(1 + 0). \tag{25}$$

Biorąc powyższe pod uwagę szczególnie interesujące jest wyznaczenie parametru χ dla portfeli, w których liczba szkód modelowana jest rozkładami NB i PIG. Wykorzystując zależność (9) oraz wyrażenia (20), (24) dla EK i wyrażenia (21), (25) dla VarK, otrzymuje się dla rozkładu NB

$$\chi = \frac{\alpha}{\beta} \Big/ \frac{\alpha}{\beta^2} = \beta, \tag{26}$$

oraz dla rozkładu PIG

$$\chi = \frac{\mu}{\mu\theta} = \frac{1}{\theta}. \tag{27}$$

Zatem po uwzględnieniu zależności (12) i (26) liniowy estymator wiarygodności dla portfela modelowanego rozkładem NB ma postać

$$\tilde{k} = \frac{n}{n+\beta}\bar{k}_n + \frac{\beta}{n+\beta}\bar{k} \tag{28}$$

lub z zależności (17) i (26)

$$\tilde{k} = \bar{k} - \frac{n}{n+\beta}\left(\bar{k} - \bar{k}_n\right). \tag{29}$$

Analogiczny estymator w przypadku wykorzystania rozkładu PIG i zależności (12) i (27), dany jest jako

$$\tilde{k} = \frac{\theta n}{1+\theta n}\bar{k}_n + \frac{1}{1+\theta n}\bar{k}, \tag{30}$$

ewentualnie dla (17) i (27) ma on postać

$$\tilde{k} = \bar{k} - \frac{\theta n}{1+\theta n}\left(\bar{k} - \bar{k}_n\right). \tag{31}$$

5. HIERARCHICZNY ESTYMATOR SZKODOWOŚCI

Problem wnioskowania o poziomie ryzyka pojedynczego ubezpieczonego na podstawie danych indywidualnych i zbiorowych można rozszerzyć na więcej źródeł informacji. W punkcie 2. przedstawiono estymator wykorzystujący informacje z dwóch źródeł – dane indywidualne i dane populacji ubezpieczonych (szkodowość indywidualna i szkodowość portfela). W przypadku, gdy w badanej populacji można wydzielić określone grupy, źródłem informacji dotyczących jednostki mogą być dane indywidualne, dane charakteryzujące określoną grupę i dane charakteryzujące całą populację. Można wówczas wykorzystać estymatory hierarchiczne (patrz np. Taylor, 1979), które wykorzystują informacje ze wszystkich dostępnych poziomów, przypisując im odpowiednie wagi. Ma to szczególne uzasadnienie, gdy w określonej grupie zachodzą zmiany wpływające na tą właśnie grupę, a nie wpływające na inne grupy.

W przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych, propozycję takiego estymatora hierarchicznego drugiego rzędu przedstawił Zehnwirth (1979). Obok indywidualnej szkodowości ubezpieczonego i szkodowości portfela zaproponował on wprowadzenie dodatkowego źródła informacji, jakim jest średnia szkodowość grupy, czy też klasy ubezpieczonych, charakteryzujących się pewnymi obserwowalnymi cechami, a stanowiących podgrupę badanego portfela. Oczywiście, jeżeli cechy charakteryzujące tą grupę są obserwowalne, informację z nich płynącą można wykorzystać w postaci oceny *a'priori*. Jednakże w przypadku wykorzystania jej *a'posteriori* ocena ryzyka ubezpieczonego pochodzącego z tej grupy dynamicznie reaguje na zmiany poziomu ryzyka w całej grupie. Co więcej, ponieważ zmiana poziomu ryzyka w tej grupie wpływa na ryzyko całego portfela, zostanie ona uwzględniona przy ocenie ryzyka ubezpieczonych w innych grupach, jako informacja płynąca ze szkodowości portfela. Oczywiście z odpowiednią wagą. Zehnwirth (1979) zaproponował wykorzystanie średniej szkodowości dla określonej grupy ubezpieczonych oszacowanej przedstawionym w punkcie 2. estymatorem wiarygodności na podstawie danych grupowych i danych dla całego portfela. Pozostając przy notacji zaproponowanej w niniejszej pracy tą oszacowaną grupową szkodowość można zapisać jako

$$\hat{k}^* = u\hat{k} + (1-u)\bar{k}, \tag{32}$$

gdzie $\hat{k}$ jest oczekiwaną liczbą szkód przypadających na ubezpieczonego w danej grupie obliczoną na podstawie informacji dotyczących tylko tej grupy.

$$u = \frac{p}{p+\hat{\chi}} \tag{33}$$

jest odpowiednią wagą, gdzie p jest liczebnością grupy a $\hat{\chi}$ wskaźnikiem zróżnicowania ryzyka w grupie otrzymanym jako iloraz oczekiwanego (średniego) zróżnicowania (wariancji) szkodowości w poszczególnych grupach (czyli średniej wariancji międzygrupowej) i zróżnicowania (wariancji) oczekiwanych (średnich) szkodowości w grupach (czyli wariancji średnich grupowych).

Miara $\hat{k}^*$ niesie ze sobą informacje dotyczące zarówno grupy jak i portfela. Kolejnym krokiem jest zbudowanie estymatora wykorzystującego miarę $\hat{k}^*$ (a więc informację grupową i dla całego portfela) i informację indywidualną. Jak podaje Zehnwirth (1979) odpowiedni hierarchiczny estymator indywidualnego poziomu ryzyka ma postać

$$\tilde{k}_n^* = v\bar{k}_n + (1-v)\hat{k}^*, \tag{34}$$

gdzie

$$v = \frac{n}{n + \frac{\hat{k}^*}{s^*}}. \tag{35}$$

Natomiast s^* jest oszacowanym za pomocą estymatora wiarygodności wskaźnikiem zróżnicowania

$$s^* = u\mathrm{Var}\lambda + (1-u)\overline{\mathrm{Var}\lambda}, \tag{36}$$

a $\overline{\mathrm{Var}\lambda}$ średnim poziomem wariancji szkodowości wśród wszystkich grup.

Ostatecznie podstawienie (32) do (34) daje

$$\tilde{k}_n^* = v\bar{k}_n + (1-v)u\hat{k} + (1-v)(1-u)\bar{k}, \tag{37}$$

co jest wyrażeniem na hierarchiczny estymator drugiego rzędu indywidualnej szkodowości *a'posteriori*.

6. ZASTOSOWANIE I WNIOSKI

Przedstawione powyżej estymatory pierwszego i drugiego rzędu zastosowano do obliczenia średniego poziomu ryzyka ubezpieczonych z portfela składającego się z czterech wydzielonych grup:
A – kierowcy limuzyn w wieku powyżej 25 lat,
B – kierowcy samochodów sportowych w wieku powyżej 25 lat,
C – kierowcy limuzyn w wieku poniżej 25 lat,
D – kierowcy samochodów sportowych w wieku poniżej 25 lat.

Dane pochodzące z Hossack (1983) przedstawione zostały w tabeli 1. Jak widać poszczególne grupy wyraźnie różnią się od siebie, występują tu grupy o poziomie ryzyka wyższym i niższym niż średni w portfelu.

Tabela 1.

Empiryczne liczebności szkód dla portfela i poszczególnych grup

Liczba szkód	PORTFEL	A	B	C	D
0	10226	5019	1068	2907	1232
1	1846	738	182	592	334
2	208	65	27	66	50
3	19	4	4	5	6
4	0	0	0	0	0
Liczebność	12299	5826	1281	3570	1622
Szkodowość	0,1886	0,151	0,1936	0,207	0,2787

Źródło: na podstawie Hossack (1983).

W celu otrzymania rozkładów teoretycznych dla danych z tabeli 1 metodą największej wiarygodności oszacowano odpowiednie parametry rozkładów ujemnych dwumianowych dla portfela i poszczególnych grup. Ze względów praktycznych ograniczono się tylko do rozkładów ujemnych dwumianowych pomijając rozkład gaussowski odwrotny. Wyniki przedstawia tabela 2. Parametry rozkładów ujemnych dwumianowych świadczą o tym, że również zróżnicowanie ryzyka wewnątrz grup jest różne, choć wszystkie można uznać za typowe dla portfela ubezpieczeń komunikacyjnych.

Dla tak otrzymanych rozkładów teoretycznych oszacowano szkodowości *a'posteriori* dla liczby lat n od 1 do 15 i liczby zgłoszonych szkód k od 0 do 6, wykorzystując estymator hierarchiczny pierwszego rzędu (tabele 3–7) i estymator hierarchiczny drugiego rzędu (tabele 8–11).

Tabela 2.

Oszacowania parametrów rozkładu ujemnego dwumianowego dla portfela i poszczególnych grup ubezpieczeń

Parametr	PORTFEL	A	B	C	D
α	4,5846	6,1540	1,5184	16,4683	12,1147
β	24,3149	40,7423	7,8428	79,5560	43,4734

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3.

Oszacowania częstości występowania szkód za pomocą estymatora pierwszego rzędu w grupie PORTFEL

Wagi	Liczba lat	Liczba szkód k						
z	n	0	1	2	3	4	5	6
0,03950	1	0,18110	0,22061	0,26011	0,29961	0,33911	0,37861	0,41812
0,07600	2	0,17422	0,21222	0,25022	0,28822	0,32623	0,36423	0,40223
0,10983	3	0,16784	0,20445	0,24106	0,27767	0,31428	0,35089	0,38750
0,14127	4	0,16191	0,19723	0,23255	0,26787	0,30318	0,33850	0,37382
0,17056	5	0,15639	0,19050	0,22462	0,25873	0,29284	0,32695	0,36107
0,19792	6	0,15123	0,18422	0,21721	0,25019	0,28318	0,31617	0,34916
0,22354	7	0,14640	0,17834	0,21027	0,24220	0,27414	0,30607	0,33801
0,24756	8	0,14187	0,17282	0,20376	0,23471	0,26565	0,29660	0,32755
0,27015	9	0,13761	0,16763	0,19765	0,22766	0,25768	0,28770	0,31771
0,29142	10	0,13360	0,16275	0,19189	0,22103	0,25017	0,27931	0,30845
0,31148	11	0,12982	0,15814	0,18645	0,21477	0,24309	0,27140	0,29972
0,33044	12	0,12625	0,15378	0,18132	0,20886	0,23639	0,26393	0,29147
0,34839	13	0,12286	0,14966	0,17646	0,20326	0,23006	0,25686	0,28366
0,36539	14	0,11966	0,14576	0,17185	0,19795	0,22405	0,25015	0,27625
0,38153	15	0,11661	0,14205	0,16748	0,19292	0,21835	0,24379	0,26923

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4.

Oszacowania częstości występowania szkód za pomocą estymatora pierwszego rzędu w grupie A

Wagi	Liczba lat	Liczba szkód k						
z	n	0	1	2	3	4	5	6
0,02396	1	0,14743	0,17138	0,19534	0,21930	0,24325	0,26721	0,29117
0,04679	2	0,14398	0,16738	0,19077	0,21417	0,23756	0,26096	0,28436
0,06858	3	0,14069	0,16355	0,18641	0,20927	0,23213	0,25499	0,27785
0,08940	4	0,13754	0,15989	0,18224	0,20459	0,22694	0,24929	0,27164
0,10931	5	0,13454	0,15640	0,17826	0,20012	0,22198	0,24384	0,26571
0,12836	6	0,13166	0,15305	0,17445	0,19584	0,21723	0,23863	0,26002
0,14662	7	0,12890	0,14985	0,17079	0,19174	0,21268	0,23363	0,25458
0,16413	8	0,12626	0,14677	0,16729	0,18780	0,20832	0,22884	0,24935
0,18093	9	0,12372	0,14382	0,16392	0,18403	0,20413	0,22424	0,24434
0,19707	10	0,12128	0,14099	0,16069	0,18040	0,20011	0,21982	0,23952
0,21259	11	0,11894	0,13826	0,15759	0,17692	0,19624	0,21557	0,23489
0,22752	12	0,11668	0,13564	0,15460	0,17356	0,19252	0,21148	0,23044
0,24190	13	0,11451	0,13312	0,15172	0,17033	0,18894	0,20755	0,22615
0,25574	14	0,11242	0,13069	0,14895	0,16722	0,18549	0,20375	0,22202
0,26910	15	0,11040	0,12834	0,14628	0,16422	0,18216	0,20010	0,21804

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 5.

Oszacowania częstości występowania szkód za pomocą estymatora pierwszego rzędu w grupie B

Wagi	Liczba lat	Liczba szkód k						
z	n	0	1	2	3	4	5	6
0,11309	1	0,17171	0,28480	0,39788	0,51097	0,62406	0,73714	0,85023
0,20319	2	0,15427	0,25586	0,35746	0,45906	0,56065	0,66225	0,76385
0,27668	3	0,14004	0,23226	0,32449	0,41672	0,50895	0,60117	0,69340
0,33776	4	0,12821	0,21265	0,29709	0,38153	0,46597	0,55041	0,63485
0,38932	5	0,11823	0,19609	0,27396	0,35182	0,42969	0,50755	0,58542
0,43344	6	0,10969	0,18193	0,25417	0,32641	0,39865	0,47089	0,54313
0,47161	7	0,10230	0,16967	0,23704	0,30442	0,37179	0,43916	0,50654

Wagi	Liczba lat	Liczba szkód k						
z	n	0	1	2	3	4	5	6
0,50496	8	0,09584	0,15896	0,22208	0,28520	0,34832	0,41144	0,47456
0,53435	9	0,09015	0,14952	0,20890	0,26827	0,32764	0,38701	0,44639
0,56045	10	0,08510	0,14114	0,19719	0,25323	0,30928	0,36532	0,42137
0,58378	11	0,08058	0,13365	0,18672	0,23979	0,29287	0,34594	0,39901
0,60475	12	0,07652	0,12692	0,17731	0,22771	0,27811	0,32850	0,37890
0,62372	13	0,07285	0,12083	0,16881	0,21678	0,26476	0,31274	0,36072
0,64094	14	0,06951	0,11530	0,16108	0,20686	0,25264	0,29842	0,34420
0,65666	15	0,06647	0,11025	0,15403	0,19780	0,24158	0,28536	0,32914

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 6.

Oszacowania częstości występowania szkód za pomocą estymatora pierwszego rzędu w grupie C

Wagi	Liczba lat	Liczba szkód k						
z	n	0	1	2	3	4	5	6
0,01241	1	0,20443	0,21685	0,22926	0,24167	0,25409	0,26650	0,27892
0,02452	2	0,20193	0,21419	0,22645	0,23871	0,25097	0,26323	0,27550
0,03634	3	0,19948	0,21159	0,22371	0,23582	0,24793	0,26005	0,27216
0,04787	4	0,19709	0,20906	0,22103	0,23300	0,24497	0,25693	0,26890
0,05913	5	0,19476	0,20659	0,21842	0,23024	0,24207	0,25389	0,26572
0,07013	6	0,19249	0,20417	0,21586	0,22755	0,23924	0,25093	0,26262
0,08087	7	0,19026	0,20182	0,21337	0,22492	0,23647	0,24803	0,25958
0,09137	8	0,18809	0,19951	0,21093	0,22235	0,23377	0,24520	0,25662
0,10163	9	0,18596	0,19726	0,20855	0,21984	0,23113	0,24243	0,25372
0,11166	10	0,18389	0,19505	0,20622	0,21739	0,22855	0,23972	0,25089
0,12147	11	0,18186	0,19290	0,20394	0,21499	0,22603	0,23707	0,24811
0,13107	12	0,17987	0,19079	0,20172	0,21264	0,22356	0,23448	0,24540
0,14046	13	0,17793	0,18873	0,19954	0,21034	0,22115	0,23195	0,24275
0,14964	14	0,17603	0,18671	0,19740	0,20809	0,21878	0,22947	0,24016
0,15864	15	0,17416	0,18474	0,19532	0,20589	0,21647	0,22704	0,23762

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 7.

Oszacowania częstości występowania szkód za pomocą estymatora pierwszego rzędu w grupie D

Wagi	Liczba lat	Liczba szkód k						
z	n	0	1	2	3	4	5	6
0,02249	1	0,27240	0,29489	0,31737	0,33986	0,36234	0,38483	0,40732
0,04398	2	0,26641	0,28840	0,31039	0,33239	0,35438	0,37637	0,39836
0,06455	3	0,26068	0,28220	0,30372	0,32523	0,34675	0,36827	0,38979
0,08426	4	0,25519	0,27625	0,29732	0,31838	0,33945	0,36051	0,38158
0,10315	5	0,24992	0,27055	0,29118	0,31181	0,33244	0,35307	0,37370
0,12128	6	0,24487	0,26509	0,28530	0,30551	0,32572	0,34594	0,36615
0,13869	7	0,24002	0,25983	0,27965	0,29946	0,31927	0,33908	0,35890
0,15542	8	0,23536	0,25479	0,27421	0,29364	0,31307	0,33250	0,35192
0,17152	9	0,23087	0,24993	0,26899	0,28804	0,30710	0,32616	0,34522
0,18701	10	0,22656	0,24526	0,26396	0,28266	0,30136	0,32006	0,33876
0,20193	11	0,22240	0,24075	0,25911	0,27747	0,29583	0,31418	0,33254
0,21632	12	0,21839	0,23641	0,25444	0,27247	0,29049	0,30852	0,32655
0,23020	13	0,21452	0,23223	0,24994	0,26764	0,28535	0,30306	0,32077
0,24359	14	0,21079	0,22819	0,24559	0,26299	0,28039	0,29778	0,31518
0,25653	15	0,20718	0,22428	0,24139	0,25849	0,27559	0,29269	0,30979

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 8.

Oszacowania częstości występowania szkód za pomocą estymatora drugiego rzędu w grupie A

Wagi	Liczba lat	Liczba szkód k						
v	n	0	1	2	3	4	5	6
0,02397	1	0,14744	0,17142	0,19539	0,21936	0,24333	0,26730	0,29127
0,04682	2	0,14399	0,16740	0,19081	0,21422	0,23763	0,26104	0,28445
0,06862	3	0,14070	0,16357	0,18645	0,20932	0,23220	0,25507	0,27794
0,08945	4	0,13755	0,15992	0,18228	0,20464	0,22700	0,24937	0,27173
0,10937	5	0,13454	0,15642	0,17829	0,20016	0,22204	0,24391	0,26579
0,12843	6	0,13166	0,15307	0,17447	0,19588	0,21729	0,23869	0,26010
0,14670	7	0,12890	0,14986	0,17082	0,19177	0,21273	0,23369	0,25465

Wagi	Liczba lat	Liczba szkód k						
v	n	0	1	2	3	4	5	6
0,16421	8	0,12626	0,14678	0,16731	0,18784	0,20836	0,22889	0,24942
0,18102	9	0,12372	0,14383	0,16395	0,18406	0,20417	0,22429	0,24440
0,19717	10	0,12128	0,14100	0,16071	0,18043	0,20015	0,21987	0,23958
0,21270	11	0,11893	0,13827	0,15761	0,17694	0,19628	0,21561	0,23495
0,22763	12	0,11668	0,13565	0,15462	0,17359	0,19255	0,21152	0,23049
0,24201	13	0,11451	0,13312	0,15174	0,17035	0,18897	0,20759	0,22620
0,25586	14	0,11241	0,13069	0,14897	0,16724	0,18552	0,20379	0,22207
0,26922	15	0,11040	0,12834	0,14629	0,16424	0,18219	0,20013	0,21808

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 9.

Oszacowania częstości występowania szkód za pomocą estymatora drugiego rzędu w grupie B

Wagi	Liczba lat	Liczba szkód k						
v	n	0	1	2	3	4	5	6
0,11295	1	0,17173	0,28468	0,39763	0,51059	0,62354	0,73650	0,84945
0,20298	2	0,15430	0,25579	0,35728	0,45877	0,56026	0,66175	0,76324
0,27642	3	0,14008	0,23222	0,32436	0,41650	0,50864	0,60078	0,69292
0,33746	4	0,12826	0,21263	0,29699	0,38136	0,46573	0,55009	0,63446
0,38901	5	0,11828	0,19609	0,27389	0,35169	0,42949	0,50729	0,58510
0,43312	6	0,10974	0,18193	0,25412	0,32630	0,39849	0,47067	0,54286
0,47128	7	0,10236	0,16968	0,23701	0,30433	0,37166	0,43899	0,50631
0,50463	8	0,09590	0,15898	0,22206	0,28514	0,34822	0,41130	0,47437
0,53403	9	0,09021	0,14955	0,20888	0,26822	0,32755	0,38689	0,44623
0,56013	10	0,08516	0,14117	0,19718	0,25319	0,30921	0,36522	0,42123
0,58346	11	0,08064	0,13368	0,18672	0,23976	0,29281	0,34585	0,39889
0,60444	12	0,07658	0,12695	0,17732	0,22769	0,27806	0,32843	0,37880
0,62341	13	0,07291	0,12086	0,16881	0,21677	0,26472	0,31268	0,36063
0,64064	14	0,06957	0,11533	0,16109	0,20685	0,25261	0,29837	0,34413
0,65637	15	0,06653	0,11028	0,15404	0,19780	0,24156	0,28531	0,32907

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 10.

Oszacowania częstości występowania szkód za pomocą estymatora drugiego rzędu w grupie C

Wagi	Liczba lat	Liczba szkód k						
v	n	0	1	2	3	4	5	6
0,01244	1	0,20441	0,21685	0,22929	0,24173	0,25417	0,26661	0,27905
0,02457	2	0,20190	0,21419	0,22648	0,23876	0,25105	0,26334	0,27562
0,03641	3	0,19945	0,21159	0,22373	0,23586	0,24800	0,26014	0,27228
0,04797	4	0,19706	0,20905	0,22104	0,23304	0,24503	0,25702	0,26901
0,05925	5	0,19472	0,20657	0,21842	0,23027	0,24212	0,25397	0,26582
0,07027	6	0,19244	0,20415	0,21587	0,22758	0,23929	0,25100	0,26271
0,08103	7	0,19022	0,20179	0,21337	0,22494	0,23652	0,24809	0,25967
0,09155	8	0,18804	0,19948	0,21093	0,22237	0,23381	0,24526	0,25670
0,10182	9	0,18591	0,19723	0,20854	0,21985	0,23117	0,24248	0,25379
0,11187	10	0,18383	0,19502	0,20621	0,21739	0,22858	0,23977	0,25096
0,12170	11	0,18180	0,19286	0,20392	0,21499	0,22605	0,23712	0,24818
0,13131	12	0,17981	0,19075	0,20169	0,21264	0,22358	0,23452	0,24546
0,14071	13	0,17786	0,18869	0,19951	0,21033	0,22116	0,23198	0,24281
0,14991	14	0,17596	0,18667	0,19737	0,20808	0,21879	0,22950	0,24021
0,15892	15	0,17409	0,18469	0,19528	0,20588	0,21647	0,22707	0,23766

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 11.

Oszacowania częstości występowania szkód za pomocą estymatora drugiego rzędu w grupie D

Wagi	Liczba lat	Liczba szkód k						
v	n	0	1	2	3	4	5	6
0,02252	1	0,27224	0,29476	0,31727	0,33979	0,36230	0,38482	0,40733
0,04404	2	0,26625	0,28827	0,31029	0,33231	0,35432	0,37634	0,39836
0,06464	3	0,26051	0,28206	0,30360	0,32515	0,34669	0,36824	0,38978
0,08436	4	0,25502	0,27611	0,29720	0,31829	0,33938	0,36047	0,38156
0,10328	5	0,24975	0,27040	0,29106	0,31171	0,33237	0,35302	0,37368
0,12142	6	0,24469	0,26493	0,28517	0,30541	0,32564	0,34588	0,36612
0,13885	7	0,23984	0,25968	0,27951	0,29935	0,31918	0,33902	0,35885

0,15560	8	0,23518	0,25463	0,27408	0,29353	0,31298	0,33243	0,35188
0,17171	9	0,23069	0,24977	0,26885	0,28793	0,30700	0,32608	0,34516
0,18722	10	0,22637	0,24509	0,26381	0,28253	0,30126	0,31998	0,33870
0,20215	11	0,22221	0,24059	0,25897	0,27734	0,29572	0,31410	0,33248
0,21655	12	0,21820	0,23625	0,25429	0,27234	0,29038	0,30843	0,32648
0,23044	13	0,21433	0,23206	0,24978	0,26751	0,28524	0,30296	0,32069
0,24384	14	0,21060	0,22802	0,24543	0,26285	0,28027	0,29769	0,31510
0,25679	15	0,20699	0,22411	0,24123	0,25835	0,27547	0,29259	0,30971

Źródło: obliczenia własne.

Otrzymane wyniki są nieco zaskakujące. O ile tabele 3–7 zawierające wyniki zastosowania estymatorów pierwszego rzędu do całego portfela i poszczególnych grup różnią się znacząco, co świadczy o uwzględnieniu różnic w poziomie ryzyka w poszczególnych grupach, to tabele 4 i 8, 5 i 9, 6 i 10 oraz 7 i 11 nie wykazują parami prawie żadnego zróżnicowania. Drobne różnice pojawiają się dopiero na 4 lub 5 miejscu po przecinku. Pary te porównują estymatory pierwszego rzędu dla grupy i danych indywidualnych z estymatorami drugiego rzędu dla portfela, grupy i danych indywidualnych.

Okazuje się, że wprowadzenie dodatkowej informacji płynącej z portfela prawie nie zmienia oceny ryzyka w porównaniu z oceną opartą o dane z grupy i indywidualne. Można powiedzieć, że w przypadku zastosowania hierarchicznych estymatorów drugiego rzędu w powyższym przykładzie, efekt grupy przesłania (lub dominuje) informację płynącą z portfela. Wydaje się więc, że w praktyce, zastosowanie hierarchicznych estymatorów rzędu wyższego niż jeden w przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych nie daje wyraźnie lepszych efektów niż zastosowanie estymatorów pierwszego rzędu.

Analizując wyrażenie (37) łatwo można spostrzec, że informacja o średniej szkodowości płynąca z portfela $\bar{k}$ wchodzi do estymatora $\tilde{k}_n^*$ z wagą

$$(1-v)(1-u),$$

czyli po uwzględnieniu (33) i (35)

$$\left(1-\frac{n}{n+\frac{\hat{k}^*}{s^*}}\right)\left(1-\frac{p}{p+\hat{\chi}}\right). \tag{38}$$

Jak się wydaje winę za nikłą wagę informacji z portfela ponosi drugi czynnik iloczynu (38). Ponieważ p jest liczbą polis w grupie, która w przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych zwykle będzie stosunkowo duża (rzędu przynajmniej kilku tysięcy) czynnik ten będzie przyjmował wartości bliskie zera i skutecznie zaniżał wagę informacji płynących z portfela. Jeżeli chodzi o pierwszy czynnik iloczynu (38) to, ponieważ zróżnicowanie szkodowości s^* jest na poziomie znacznie niższym niż sama szkodowość $\hat{k}^*$ (w przypadku rozkładu Gamma są to wielkości rzędu α/β i α/β^2) można się spodziewać, że jego waga będzie zauważalna i zależna od czasu n. Nie zmieni to jednak faktu, że cały iloczyn będzie bliski zera. Wobec tego informacją, która pozostanie, będzie szkodowość grupowa $\hat{k}$ z wagą

$$(1 - v)u,$$

co ponieważ u jest bardzo bliskie jedności, uzależnia wagę szkodowości grupowej $\hat{k}$ i indywidualnej $\bar{k}_n$ równą

$$(1 - v)$$

od czynnika v, a tym samym głównie od czasu n pozostawania ubezpieczonego w portfelu.

Oczywiście nie można wykluczyć, że w specyficznych przypadkach zastosowanie hierarchicznego estymatora drugiego rzędu ma sens. Jednak z przeprowadzonego badania wynika, że na skutek nikłej wagi szkodowości $\bar{k}$, co pokazuje wzór (38), dla większości rzeczywistych portfeli ubezpieczonych estymator pierwszego rzędu jest tak samo dobry. Nacisk należy raczej położyć na możliwie precyzyjne określenie *a'priori* homogenicznych grup ryzyka.

Estymatory hierarchiczne mogą znaleźć zastosowanie w przypadkach, gdy mamy do czynienia z większą liczbą grup ryzyka, które są mniej liczne, lecz ich członkowie bardziej zróżnicowani pod względem ryzyka niż ma to miejsce w przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych.

LITERATURA

Hossack I. B., Pollard J. H., Zehnwirth B., (1983), *Introductory Statistics with Applications in General Insurance*, Cambrige Uniwersity Press.

Jasiulewicz H., (2005), *Teoria zaufania. Modele aktuarialne*, Wydawnictwo AE im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.

Jewell W. S., (1974), Credible Means Are Exact Bayesian for Exponential Families, ASTIN Bulletin 8 (1), 77–90.

Jewell W. S., (1975), The Use of Collateral Data in Credibility Theory: A Hierarchical Model, Research Memorandum of the International Institute for Applied Systems Analysis, 24, Laxenburg, Austria.

Lemaire J., (1985), *Automobile Insurance: Actuarial Models*, Kluwer Nijhoff, Boston.

Norberg R., (1979), The Credibility Approach to Experience Rating, *Scandinavian Actuarial Journal*, 181–221.

Szymańska A., (2014), *Statystyczna analiza systemów bonus-malus w ubezpieczeniach komunikacyjnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Taylor G. C., (1979), Credibility Analysis of a General Hierarchical Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, 1–12.

Willmot G. E., (1987), The Poisson-Inverse Gaussian Distribution as an Alternative to Negative Binominal, *Scandinavian Actuarial Journal*, 113–127.

Zehnwirth B., (1977), The Mean Credibility Formula is a Bayes Rule, *Scandinavian Actuarial Journal*, 212–216.

Zehnwirth B., (1979), A Hierarchical Model for the Estimation of Claim Rates in a Motor Car Insurance Portfolio, *Scandinavian Actuarial Journal*, 75–82.

ANALIZA MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA HIERARCHICZNYCH ESTYMATORÓW WIARYGODNOŚCI WYŻSZEGO RZĘDU W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH

Streszczenie

Praca dotyczy możliwości zastosowania estymatorów wiarygodności rzędu wyższego niż jeden, zwanych estymatorami hierarchicznymi, do oszacowania szkodowości *a'posteriori* w systemach ubezpieczeń komunikacyjnych uwzględniających historię szkodowości ubezpieczonego. W części pierwszej przedstawiona jest idea metody wiarygodności, a w części drugiej omówiony liniowy estymator wiarygodności. Część trzecia wprowadza odpowiednie dla badanego problemu modele ryzyka w postaci rozkładów liczby szkód, które zostają wykorzystane do wyprowadzenia odpowiednich estymatorów pierwszego rzędu. Część czwarta rozszerza rozważania z części trzeciej o estymatory hierarchiczne drugiego rzędu. W empirycznej części piątej zastosowano wcześniej przedstawione rozwiązania do oszacowania szkodowości dla przykładowego portfela ubezpieczeń, porównano uzyskane wyniki i wyciągnięto wnioski dotyczące możliwości zastosowana hierarchicznych estymatorów drugiego rzędu w ubezpieczeniach komunikacyjnych.

Słowa kluczowe: ubezpieczenia komunikacyjne, metoda wiarygodności, estymatory hierarchiczne

ANALYSIS OF POSSIBILITY OF APPLICATION OF HIGHER-ORDER HIERARCHICAL CREDIBILITY ESTIMATORS IN AUTOMOBILE INSURANCE

Abstract

The work concerns the applicability of credibility estimators of order higher than one, called hierarchical estimators, to posterior estimates of claim ratio in motor insurance systems based on the history of the insured. The first part presents the idea of the credibility estimation method. In the second part the linear credibility estimator is discussed. The third part introduces appropriate for risk models in the form of claims distributions, which are used to derive the corresponding hierarchical estimates of the first order. The fourth section expands the discussion of the hierarchical estimators of the order two. In the empirical fifth part previously presented solutions are used to estimate the loss ratio for the sample insurance portfolio, results are discussed and conclusions concerning the possibility of application of second order hierarchical estimators into motor insurance are formulated.

Keywords: automobile insurance, credibility, hierarchical estimators