

DARIUSZ SIUDAK¹

STRUKTURA SPOŁECZNOŚCI SIECI POWIĄZAŃ RAD DYREKTORÓW PRZEDSIĘBIORSTW NA POLSKIM RYNKU KAPITAŁOWYM²

1. WPROWADZENIE

Sieci społeczne (ang. *social network*) w odróżnieniu od sieci technologicznych, informacyjnych czy biologicznych posiadają strukturę społeczności. Jak wykazano w pracy (Newman, Park, 2003), jest to wynikiem wysokiego poziomu współczynnika skupienia (ang. *clustering coefficient*) oraz silnego dodatniego skorelowania stopnia relacji (ang. *assortative mixing*) jakie charakteryzuje większość sieci społecznych. Pierwsza przyczyna oznacza, że sieć wykazuje cechy małego świata (ang. *small-world*)³, druga zaś, wskazuje na sieć, gdzie węzły o niskim stopniu relacji (ang. *degree*) połączone są ze sobą, oraz występują połączenia pomiędzy węzłami o wysokim stopniu relacji. Wykrywanie struktury społeczności (ang. *community structure*) jest podstawowym elementem analizy sieci złożonych (ang. *complex networks*) (Jia i inni, 2015), i jednocześnie użytecznym narzędziem uchwycenia złożoności, struktury oraz typologii organizacji sieci na wyższym poziomie niż pojedyncze wierzchołki (Wakita, Tsurumi, 2007). Grupy węzłów utworzone w wyniku podziału sieci na poszczególne społeczności zazwyczaj posiadają wspólne cechy lub też pełnią podobne role w całym systemie złożonym (Piccardi i inni, 2010). Na tej podstawie formułujemy przypuszczenie, że sieć powiązań przedsiębiorstw wspólną dyrekcją na polskim rynku kapitałowym wykazuje silną strukturę społeczności. Sieć powiązań przedsiębiorstw wspólną dyrekcją (ang. *interlocking directorates*) formowana jest w sytuacji, gdy co najmniej jedna osoba jest członkiem rady dyrektorów w dwóch (lub więcej) przedsiębiorstwach. Wówczas tworzone jest połączenie pomiędzy tymi spółkami. Za radę dyrektorów (ang. *board of directors*) przyjmuje się członków rad nadzorczych oraz członków zarządu (por. Lis, Sterniczuk 2005, s. 29). Takie podejście wynika z przesłanki potencjalnej wymiany informacji (sieć komunikacyjna), co umożliwi redukcję niepewności w otoczeniu

¹ Politechnika Łódzka, Wydział Organizacji i Zarządzania, Instytut Nauk Społecznych i Zarządzania Technologiami, Zakład Ekonomii, ul. Wólczańska 215, 90-924 Łódź, Polska, e-mail: dariusz.siudak@p.lodz.pl.

² Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2013/11/B/HS4/00466.

³ Cecha małego świata oznacza, że średnia najkrótsza odległość pomiędzy węzłami (ang. *geodesic distance*) w sieci jest bardzo mała i wraz ze wzrostem liczby węzłów w sieci odległość ta wzrasta w tempie logarytmicznym.

przedsiębiorstwa (Schoorman i inni., 1981) oraz kontrolę otoczenia zewnętrznego (Yang, Cai, 2011).

Silna struktura społeczności została wykazana w sieci składającej się z 292 przedsiębiorstw notowanych na włoskim rynku kapitałowym w końcu 2008 roku (Piccardi i inni, 2010). Wyniki tych badań zostaną przedstawione w dalszej części i zostaną porównane z wynikami badań będącymi przedmiotem niniejszego artykułu.

Celem artykułu jest wykrycie struktury społeczności w sieci przedsiębiorstw powiązanych wspólną dyrekcją⁴.

W pierwszych trzech częściach artykułu zostały przedstawione aspekty związane z (1) teorią sieci wraz z modelem sieci jedno i dwumodalnej oraz projekcją sieci jednomodalnej na podstawie sieci dwumodalnej; (2) identyfikacją społeczności w sieci; (3) funkcji jakości i metod tworzenia podziału. Czwarta część zawiera opis badanej próby, a w piątej zamieszczono wyniki badań. Pracę zamyka podsumowanie.

2. PROJEKCJA SIECI JEDNOMODALNEJ NA PODSTAWIE SIECI DWUMODALNEJ

Sieć powiązań przedsiębiorstw na podstawie wspólnej dyrekcji, jak również każdy inny rodzaj sieci, można przedstawić za pomocą grafu nieskierowanego (ang. *undirected*) $G = (V, L)$, składającego się z wierzchołków (przedsiębiorstwa) $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, gdzie $V \neq \emptyset$ oraz z połączeń $L = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$. Graf jest stopnia n składając się z v_n wierzchołków, natomiast rozmiar grafu wynosi m (liczba połączeń). Graf nieskierowany stopnia n może składać się co najwyżej z $m = n(n - 1)/2$ liczby połączeń. Całość informacji zawarta w nieskierowanej sieci można zapisać w n wymiarowej symetrycznej macierzy połączeń $A = [a_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), gdzie elementy a_{ij} przyjmują wartość

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli pomiędzy wierzchołkami } i \text{ a } j \text{ występuje połączenie } (i \neq j), \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (1)$$

Graf nieskierowanej jednomodalnej sieci (ang. *one-mode network*) połączeń przedsiębiorstw z uwagi na występującą wspólną dyrekcję, otrzymywany jest na podstawie dwudzielnego grafu (ang. *bipartite graph*), który opisuje tzw. sieć dwumodalną (ang. *two-mode network*). Sieć dwumodalna składa się z dwóch rodzajów wierzchołków, zaś połączenia występują tylko i wyłącznie pomiędzy wierzchołkami różnych kategorii (por. Albert, Barabasi, 2002; Henning i inni, 2012). Innymi słowy, graf $G = (V, L)$ określany jest grafem dwudzielnym, jeżeli może zostać podzielony na $r = 2$ grupy, gdzie dwa końce każdej z krawędzi łączy $r = 2$ różnych grup wierzchołków (Caldarelli, 2013, s. 259).

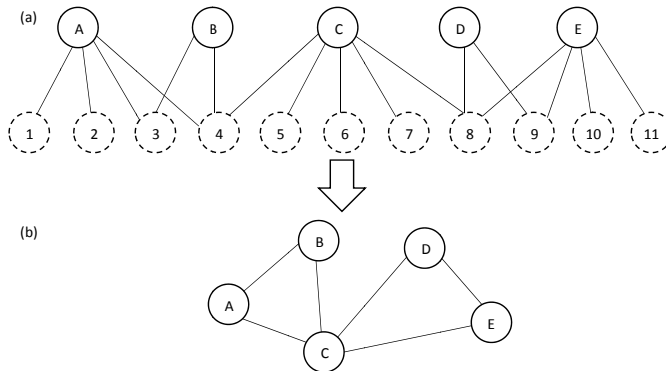
W sieci rad dyrektorów występują dwa rodzaje wierzchołków V_1 – członkowie rad dyrektorów, oraz V_2 – przedsiębiorstwa. Rada dyrektorów danego przed-

⁴ Przedmiotem pracy nie stanowi struktura społeczności sieci powiązań osób zasiadających w radach dyrektorów, tj. tzw. sieci dyrektorów (ang. *director network*).

siębiorstwa może się składać z kilku osób, co warunkuje odpowiednie połączenia pomiędzy k -tą osobą ($k = 1, 2, \dots, q$) a i -tym przedsiębiorstwem ($i = 1, 2, \dots, n$). Jednocześnie jedna osoba może być członkiem rady dyrektorów więcej niż jednego przedsiębiorstwa. W konsekwencji powstaje macierz połączeń dwumodalnej, nieskierowanej sieci członków rad dyrektorów ze spółkami $\mathbf{B} = [b_{ik}]$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, q$) o wymiarach $n \times q$, gdzie elementy b_{ik}

$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } k\text{-ty dyrektor należy do rady dyrektorów } i\text{-tego przedsiębiorstwa,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (2)$$

W wierszach macierzy \mathbf{B} zapisywane są kolejne i -te przedsiębiorstwa, zaś w kolumnach kolejne k -te osoby będące członkami rad dyrektorów. Graficzna prezentacja sieci jednomodalnej i dwumodalnej została przedstawiona na rysunku 1, gdzie wierzchołki oznaczone ciągłą linią to rady dyrektorów poszczególnych przedsiębiorstw, a wierzchołki oznaczone linią przerywaną to członkowie tych rad. Na rysunku tym przedstawiono jednocześnie schemat przekształcenia sieci dwumodalnej do jednomodalnej.



Rysunek 1. Struktura modelu sieci (a) dwu- i (b) jednomodalnej, oraz projekcja sieci jednomodalnej na podstawie zaobserwowanej sieci dwumodalnej

Źródło: opracowanie na podstawie Newman (2010, s. 125).

Jeżeli w skład rady dyrektorów i -tego oraz j -tego przedsiębiorstwa wchodzi k -ty członek rady w dwumodalnej sieci, wówczas iloczyn $b_{ik}b_{jk}$ wynosi dokładnie 1. Stąd łączna liczba osób p_{ij} , które zasiadają jednocześnie w radzie dyrektorów przedsiębiorstw i oraz j wynosi:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^q b_{ik}b_{jk}^T = \sum_{k=1}^q b_{ik}b_{jk}, \quad (3)$$

gdzie elementy b_{kj}^T stanowią elementy macierzy transponowanej \mathbf{B}^T . W efekcie otrzymujemy macierz o wymiarach $n \times n$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T. \quad (4)$$

Elementy macierzy \mathbf{P} poza przekątną ($i \neq j$) stanowią łączną liczbę osób jednocześnie zasiadających w spółkach i oraz j , zaś wartości na przekątnej ($i = j$) wskazują na łączną liczbę osób wchodzących w skład rady dyrektorów i -tego przedsiębiorstwa. Macierz \mathbf{P} stanowi zatem sieć wartościową (ang. *valued*) z występującymi połączeniami od danego wierzchołka do samego siebie (ang. *self-loop*). W celu uzyskania nieskierowanej binarnej sieci jednomodalnej w postaci symetrycznej macierzy \mathbf{A} o elementach a_{ij} (1), należy dokonać dychotomizację wartości elementów a_{ij} macierzy \mathbf{P} wraz z przekształceniem jej elementów na przekątnej w następujący sposób

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } p_{ij} > 0 \text{ dla } i \neq j, \\ 0 & \text{jeżeli } p_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j, \\ 0 & \text{dla } i = j, \end{cases} \quad (5)$$

gdzie elementy $a_{ij} = a_{ji}$.

Tak przeprowadzona projekcja jednomodalnej sieci powiązań przedsiębiorstw na podstawie dwumodalnej sieci wspólnej dyrekcji pozwala na utworzenie sieci przedsiębiorstw powiązanych wspólną dyrekcją. Elementy macierzy \mathbf{A} $a_{ij} = 1$ oznaczają, że występuje wspólna dyrekcja przedsiębiorstwa i oraz j , czyli przynajmniej jedna osoba zasiada w radzie dyrektorów obu spółek, zaś elementy $a_{ij} = 0$ wskazują na brak połączenia.

3. IDENTYFIKACJA SPOŁECZNOŚCI W SIECI

Ze względu na fakt, że struktura społeczności zawiera grupy podobnych do siebie wierzchołków zorientowanych w poszczególnych podgrafach (Fortunato, 2010), struktura ta ujawnia ukryte informacje o rozpatrywanej sieci, niemożliwe do rozpoznania za pomocą innych typologicznych właściwości (Collingsworth, Menezes, 2014). W literaturze przedmiotu bardzo często podawana jest bardzo ogólna definicja struktury społeczności, jako podział wierzchołków w sieci na grupy, gdzie obserwowana jest duża gęstość krawędzi wewnątrz grup i jednocześnie występują rzadkie połączenia pomiędzy wierzchołkami różnych grup (Newman, Girvan, 2004; Newman, 2004; Claset i inni, 2004; Newman, 2006; Raghavan i inni, 2007; Piccardi i inni, 2010; Thadakamalla i inni, 2008; Palla i inni, 2005). Bardziej precyzyjnym podejściem jest zdefiniowanie społeczności w sensie mocnym (ang. *strong communities*) i w sensie słabym (ang. *weak communities*). W pierwszym podejściu każdy węzeł posiada większy stopień relacji (ang. *degree*) wewnątrz własnej społeczności (d_i^{in}) niż stopień relacji do pozostałych w sieci wierzchołków (d_i^{out}) (Radicchi i inni, 2004)

$$d_i^{in}(V) > d_i^{out}(V), \quad \forall i \in V, \quad (6)$$

gdzie podgraf V ($V \in G$) jest społecznością w sensie mocnym. Dla danego wierzchołka stopień relacji stanowi liczbę krawędzi wychodzących i wynosi

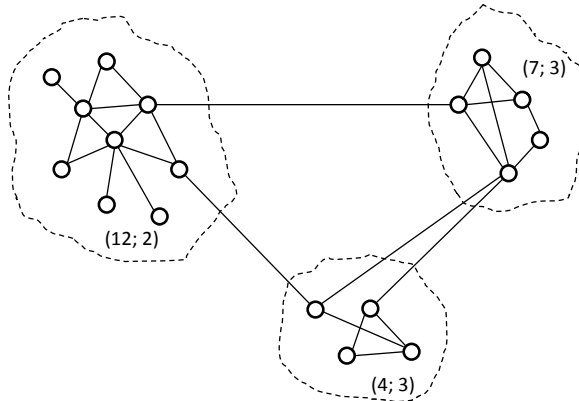
$$d_i(V) = d_i^{in}(V) + d_i^{out}(V). \quad (7)$$

Relaksacja definicji społeczności w sensie mocnym polega na założeniu, że dla społeczności w sensie słabym suma stopni relacji wszystkich wierzchołków w danej grupie jest większa lub równa od sumy stopni relacji do pozostałych wierzchołków w sieci

$$\sum_{i \in V} d_i^{in}(V) \geq \sum_{i \in V} d_i^{out}(V), \quad (8)$$

gdzie podgraf V jest społecznością w sensie słabym.

Na rysunku 2 zaprezentowano przykład struktury społeczności. Ze względu na połączenia wierzchołka zaznaczonego kolorem białym, zaprezentowana struktura społeczności jest w sensie słabym.



Rysunek 2. Struktura społeczności sieci składającej się z 3 modułów, 18 wierzchołków, 27 krawędzi. W nawiasach podano odpowiednio liczbę krawędzi wewnątrzgrupowych i wychodzących na zewnątrz modułu

Źródło: opracowanie własne na podstawie Thadakamalla i inni (2008).

W pracy będziemy poszukiwać struktury społeczności w sieci powiązań przedsiębiorstw na podstawie definicji w sensie słabym. Z definicji tej wynika, że dana sieć może się składać z grup o różnej liczbie wierzchołków a także brak jest możliwości jednoczesnego występowania danego wierzchołka w kilku grupach (ang. *overlapping communities*). Wykrywanie struktury społeczności różni się w swym podejściu do podobnego zagadnienia jakim jest podział grafu (ang. *graph partitioning*). Podstawowa różnica polega na tym, że w problemie wykrywania społeczności nie określona jest z góry liczba grup oraz ich rozmiary, jakie mają powstać w wyniku podziału. W konsekwencji może wystąpić brak podziału w sytuacji, kiedy nie istnieje podstawa do wydzielenia podgrafu. Podejście to prowadzi do bardziej naturalnego podziału, co pozwala na bardziej prawidłową analizę struktury sieci.

4. FUNKCJA JAKOŚCI I METODY TWORZENIA PODZIAŁU

Przedstawione definicje struktury społeczności w sieci pozwalają na przeprowadzenie podziału na różne sposoby w sensie modyfikacji relacji liczba grup – wielkość grup, np. dużo grup o małych rozmiarach lub mało grup o dużej ilości wierzchołków. Zadanie wykrycia struktury społeczności w sieci sprowadza się do poprawnego podziału wierzchołków na odpowiednie grupy z wykorzystaniem odpowiedniej funkcji pomiaru jakości podziału. Funkcję tę zdefiniowano w pracy (Newman i Girvan, 2004) określając mianem modułowości (ang. *modularity*). Podstawą funkcji jakości podziału jest założenie, że sieć utworzona w sposób losowy poprzez losowe łączenie kolejnych wierzchołków nie zawiera struktury społeczności. Losowa sieć stanowi model zerowy (ang. *null model*), graf o tej samej liczbie wierzchołków i krawędzi co oryginalna sieć, gdzie wierzchołek i może zostać połączony z każdym dowolnym wierzchołkiem j z zachowaniem stopnia relacji poszczególnych wierzchołków d_i oraz d_j na podstawie analizowanej sieci. Prawdopodobieństwo połączenia wierzchołków i oraz j (P_{ij}) w sieci tworzonej w sposób losowy z zachowaniem sekwencji stopnia relacji wynosi (S. Fortunato, 2010)

$$P_{ij} = \frac{d_i d_j}{2m}, \quad (9)$$

gdzie: d_i, d_j – stopień relacji wierzchołka i oraz j , m – liczba połączeń w sieci.

W celu weryfikacji czy analizowana sieć posiada strukturę społeczności, model zerowy stanowi odpowiednie tło porównawcze.

Przeprowadzany jest podział sieci składającej się z m połączeń na s -grup ($r = 1, 2, \dots, s$) z liczbą połączeń l_r w każdej z grup. Następnie porównywane są dwie sieci: (1) rozpatrywana sieć oraz (2) sieć utworzona w sposób losowy z tym samym ciągiem stopnia relacji (ang. *degree*) co sieć analizowana (Dorogovtsev, 2010):

$$Q = \sum_{r=1}^s \left[\frac{l_r}{m} - \left(\frac{d_r}{2m} \right)^2 \right], \quad (10)$$

gdzie: l_r – liczba połączeń w grupie r , d_r – suma stopni relacji wierzchołków w grupie r , m – liczba połączeń w całej sieci.

Funkcja jakości podziału przyjmuje wartości mniejsze od jedności. Wartość Q bliska jedności wskazuje, że w przeprowadzonym podziale danej sieci zostały utworzone grupy, w których występuje większa liczba połączeń wewnątrz społeczności, niż oczekiwana liczba wewnątrzgrupowych połączeń w sieci utworzonej w sposób losowy. Wartość oczekiwana połączeń modelu zerowego stanowi średnią ze wszystkich możliwych realizacji w sposób losowy połączeń z zachowaniem rozkładu stopnia relacji sieci rozpatrywanej. Natomiast wartość $Q = 0$, oznacza, że w wyniku podziału powstały grupy wewnątrz których obserwowane połączenia są w ilości nie większej niż wartość oczekiwana połączeń wewnątrz grup sieci losowej. Zdefiniowana funkcja jakości (10) może przyjmować w niektórych sytuacjach wartości mniejsze od zera

(np. w sytuacji, gdzie każdy węzeł w sieci stanowi odrębny moduł), co oznacza, że spójność wydzielonych grup jest mniejsza od podziału jaki może powstać przy losowym łączeniu wierzchołków.

M. Newman reprezentuje pogląd, że wartość funkcji jakości podziału Q większa od 0,3 wskazuje na istotną strukturę społeczności (Newman, 2004). Natomiast (Dorogovtsev, 2010) podkreśla, że w obserwowanych rzeczywistych sieciach typowa wartość funkcji jakości zawiera się w zakresie 0,3–0,8, zaś (Newman, Girvan, 2004) w zakresie 0,3–0,7, i ponadto wartości $Q > 0,7$ należą do rzadkości. Uogólniając podział, który nie wykazuje dodatniej wartości funkcji jakości podziału Q , oznacza że sieć nie zawiera struktury społeczności.

Zagadnienie wykrycia odpowiedniej struktury społeczności sieci sprowadza się do problemu optymalizacji podziału, czyli takiego podziału gdzie maksymalizowana jest funkcja jakości podziału $Q \rightarrow \max$, określona wzorem (10) (Good i inni, 2010), niezależnie jak wiele grup utworzono w wyniku podziału. Więcej o funkcji jakości podziału, jak również ekwiwalentne jej postacie, można znaleźć w pracach (Newman, 2010; Newman, 2006; Caldarelli, 2013; Reichard, Bornholdt, 2006; Guimera i inni, 2004; Kolaczyk, 2009).

W pracy zastosowano 7 różnych algorytmów podziału, których podstawę stanowi maksymalizacja zaprezentowanej funkcji jakości podziału Q . Metody te stanowią grupę algorytmów z klasy tzw. chciwych (ang. *greedy*), poszukując najlepszego podziału, któremu odpowiada najwyższa wartość funkcji jakości Q . Zastosowano następujące algorytmy (w nawiasie podano przypis literaturowy gdzie znajduje się szczegółowy opisu danego algorytmu):

- 1) CNM (Clauset i inni, 2004);
- 2) HE (Wakita, Tsurumi, 2007);
- 3) HE' (Wakita, Tsurumi, 2007);
- 4) NE (Wakita, Tsurumi, 2007);
- 5) Metoda wektora własnego (ang. *Eigenvector*) (Newman, 2006a; Newman, 2006b);
- 6) Propagacja etykiet (ang. *Label Propagation*) (Raghavan i inni, 2007);
- 7) Algorytm Blondela (Blondel i inni, 2008).

5. OPIS BADANEJ PRÓBY

Badaniu poddano sieć przedsiębiorstw utworzoną na podstawie ich powiązań za pośrednictwem rady dyrektorów, w skład której wchodzi członkowie rad nadzorczych oraz członkowie zarządu. Sposób utworzenia jednomodalnej sieci przedsiębiorstw zaprezentowano w punkcie 1. Badaniu poddano łącznie 902 przedsiębiorstwa notowane na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie oraz na rynku New Connect w grudniu 2014 roku. Źródło informacji o osobach zasiadających w zarządach i radach nadzorczych stanowi baza danych Notoria. Macierz dwumodalna powstała na podstawie zgromadzonych danych z wykorzystaniem odpowiedniego algorytmu zaimplementowanego w arkuszu Excel. Analizę struktury społeczności ograniczono

do największego komponentu. Komponent stanowi maksymalny zbiór wierzchołków, gdzie dowolna para wierzchołków połączona jest odpowiednią ścieżką. Liczba przedsiębiorstw znajdująca się w największym komponencie wynosi 518 (57,43%). Pozostałe przedsiębiorstwa rozbite są na mniejsze komponenty, tj. 1 komponent sześćoelementowy, 1 komponent pięcioelementowy, 5 komponentów czteroelementowych, 15 komponentów trzelementowych, 22 komponenty dwuelementowe i 264 przedsiębiorstwa izolowane, które nie posiadają połączenia z innymi spółkami (stopień relacji wynosi zero).

6. WYNIKI BADAŃ

W tabeli 1 zamieszczono wartości funkcji jakości Q oraz liczbę uzyskanych modułów w wyniku podziału sieci przedsiębiorstw z zastosowaniem algorytmów wskazanych w punkcie 3. Liczba uzyskanych grup, poza metodą propagacji etykiet, jest dość stabilna i zawiera się w zakresie 17–19.

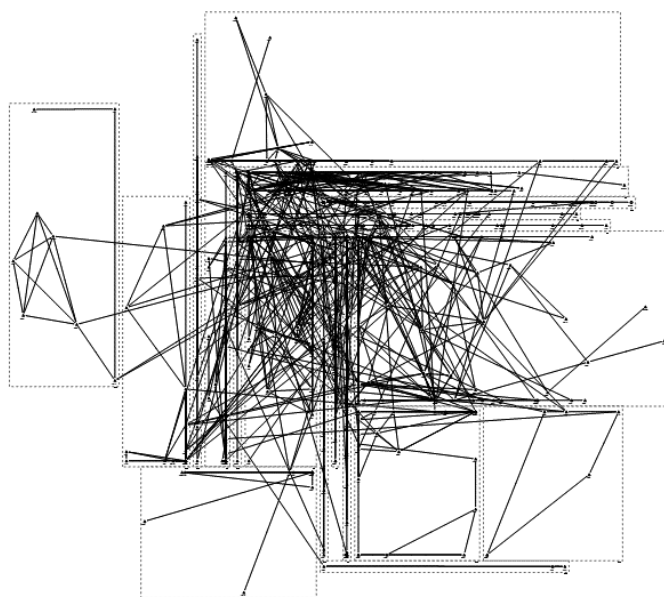
Tabela 1.

Wartość funkcji jakości podziału (Q) i liczba społeczności w wyniku zastosowania 7 algorytmów podziału

Algorytm	Modułowość Q	Liczba społeczności
CNM	0,765	19
HE	0,763	17
HE'	0,770	17
NE	0,765	19
Metoda wektora własnego (<i>Eigenvector</i>)	0,774	19
Propagacja etykiet (<i>Label Propagation</i>)	0,749	51
Blondela	0,757	18

Źródło: opracowanie własne.

Warto podkreślić bardzo wysokie wartości funkcji jakości podziału dla 7 zastosowanych algorytmów (w zakresie 0,749–0,774). Najniższą wartość funkcji jakości uzyskano przy podziale metodą propagacji etykiet ($Q = 0,749$) i jednocześnie biorąc pod uwagę utworzenie zdecydowanie większej liczby grup (51) w porównaniu z innymi podziałami, wynik uzyskany tą metodą należy zmarginalizować. Największą wartość funkcji uzyskano przy podziale sieci metodą wektora własnego – $Q = 0,774$ – co należy przyjąć jako najlepszy podział analizowanej sieci przedsiębiorstw. Strukturę 19 społeczności z wykorzystaniem metody wektora własnego sieci przedsiębiorstw na polskim rynku kapitałowym zamieszczono na rysunku 3.



Rysunek 3. Struktura 19 społeczności z wykorzystaniem metody wektora własnego sieci przedsiębiorstw na polskim rynku kapitałowym

Źródło: opracowanie własne.

Biorąc pod uwagę wartości funkcji podziału Q dla wszystkich metod podziału, należy stwierdzić, że w sieci przedsiębiorstw powiązanych wspólną dyrekcją występuje silna struktura społeczności. W badaniach rzadko spotykane są podziały sieci, gdzie wartość funkcji podziału przekracza wartość 0,7. Podział analizowanych 518 usieciowionych przedsiębiorstw na 19 modułów metodą wektora własnego, przy uzyskaniu wartości funkcji podziału Q bliskiej 0,8 wskazuje jednoznacznie na wyraźnie występującą strukturę społeczności. Uzyskane wyniki badania są zgodne z wynikami badania sieci 292 przedsiębiorstw powiązanych wspólną dyrekcją na włoskim rynku kapitałowym w 2008 roku (Piccardi i inni, 2010), gdzie otrzymano wartość $Q = 0,54$ identyfikując 12 grup⁵.

Podkreślić należy, że za pomocą podziału metodą wektora własnego uzyskano 19 różnorodnych grup, gdzie najliczniejsze to grupa 1 i 2 po 63 przedsiębiorstwa, zaś najmniej liczna grupa 19, do której zakwalifikowano 3 spółki. W tabeli 2 zamieszczono liczebność przedsiębiorstw w poszczególnych grupach dla podziału metodą wektora własnego. W tabeli tej zamieszczono także reprezentantów poszczególnych modułów pod względem największej centralności jakie spółki te zajmują w ramach danej społeczności. Centralność w ramach społeczności mierzona jest za pomocą

⁵ Natomiast na podstawie tej samej próby badawczej uzyskano wynik $Q = 0,59$ dla sieci przedsiębiorstw powiązanych strukturą właścicielską (ang. *corporate ownership network*).

miary centralności społeczności (ang. *community centrality*), która mierzy stopień centralności w ramach danej społeczności, w postaci wektora własnego macierzy modułowości. Szczegółowy opis miary centralności społeczności znajduje się w pracy (Newman, 2006b). Spółki reprezentanci poszczególnych społeczności stanowią tzw. centra (ang. *hubs*) w ramach danej grupy. Stanowią one najbardziej usieciowione przedsiębiorstwa w swoich grupach.

Tabela 2.

Liczba przedsiębiorstw dla struktury społeczności metodą wektora własnego oraz reprezentanci poszczególnych grup o najwyższej wartości miary centralności społeczności

Nr modułu	Liczba przedsiębiorstw	Proporcja	Skumulowana proporcja	Spółka (Ticker)	Centralność społeczności
1	63	0,122	0,122	MCI	1,505
2	63	0,122	0,243	GTC	1,532
3	44	0,085	0,328	PCG	1,770
4	41	0,079	0,407	PTW	1,283
5	40	0,077	0,485	EBC	1,305
6	34	0,066	0,550	LWB	1,373
7	33	0,064	0,614	VST	1,541
8	31	0,06	0,674	BCM	1,546
9	30	0,058	0,732	PRT	1,607
10	25	0,048	0,780	FRO	1,065
11	25	0,048	0,828	CTG	1,175
12	21	0,041	0,869	QMK	1,656
13	16	0,031	0,900	IDA	1,394
14	13	0,025	0,925	DRE	1,354
15	12	0,023	0,948	PGD	1,160
16	10	0,019	0,967	GEM	0,976
17	8	0,015	0,983	GNB	1,015
18	6	0,012	0,994	SGN	0,949
19	3	0,006	1	INW	0,788

Źródło: opracowanie własne.

Analizie zostanie poddana liczba połączeń wewnątrz- i zewnątrzgrupowych na poziomie zagregowanym dla wyodrębnionych 19 społeczności metodą wektora własnego (tabela 3).

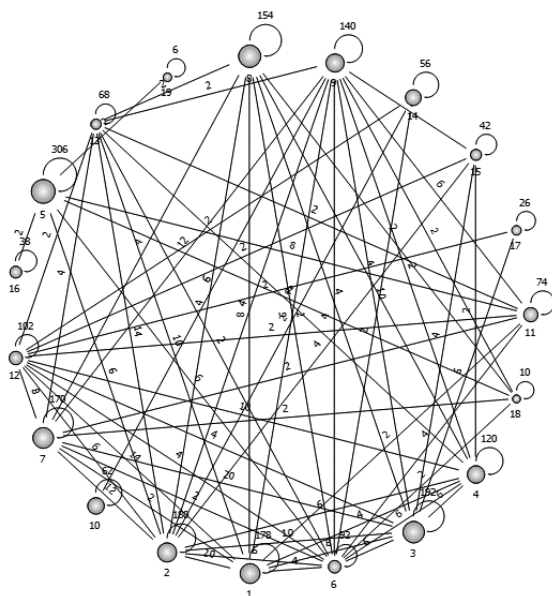
Tabela 3.

Liczba połączeń wewnątrz- i zewnątrzgrupowych dla wyspecyfikowanych 19 społeczności metodą wektora własnego

Społeczność	Liczba połączeń wewnątrzgrupowych $\sum_{i \in V} d_i^{in}(V)$	Liczba połączeń zewnątrzgrupowych $\sum_{i \in V} d_i^{out}(V)$	$\sum_{i \in V} d_i^{in}(V) - \sum_{i \in V} d_i^{out}(V)$
1	178	78	100
2	180	94	86
3	192	78	114
4	120	46	74
5	306	26	280
6	92	50	42
7	170	68	102
8	154	30	124
9	140	58	82
10	62	6	56
11	74	26	48
12	102	56	46
13	68	44	24
14	56	6	50
15	42	16	26
16	38	2	36
17	26	8	18
18	10	10	0
19	6	2	4

Źródło: opracowanie własne.

Jedynie społeczność nr 18 posiada tą samą liczbę połączeń pomiędzy wierzchołkami w tej grupie co łączna liczba połączeń wychodzących do wierzchołków znajdujących się w 5 innych społecznościach. W pozostałych grupach obserwujemy dodatnie różnice pomiędzy ilością połączeń wewnątrz danej społeczności a liczbą relacji zewnątrzgrupowych – od 4 dla społeczności nr 19 do 280 dla społeczności nr 5. Graficzną prezentację połączeń wewnątrz- i zewnątrzgrupowych przedstawiono na rysunku 4, gdzie wielkość wierzchołka danej społeczności jest proporcjonalna do powyższej różnicy.



Rysunek 4. Graficzna prezentacja połączeń wewnętrznych i zewnętrznych 19 społeczności
Źródło: opracowanie własne.

7. PODSUMOWANIE

Spośród 902 usieciowionych przedsiębiorstw wspólną dyrekcją (ang. *interlocking directorate*), ponad 57% spółek wchodzi w skład wielkiego komponentu. Komponent ten, składający się z 518 przedsiębiorstw, wykazuje silną strukturę społeczności, gdzie największą wartość funkcji podziału $Q = 0,774$ uzyskano metodą wektora własnego, otrzymując w efekcie strukturę składającą się z 19 społeczności. Wysoka wartości funkcji podziału Q oznacza, że w strukturze 19 społeczności występuje zdecydowanie większa liczba połączeń wewnątrz wyodrębnionych grup niż oczekiwana wartość relacji wewnątrzgrupowych w sytuacji losowego uformowania sieci 518 przedsiębiorstw należących do wielkiego komponentu. Tym samym pozytywnie zweryfikowano postawione w pracy przypuszczenie o występowaniu silnej struktury społeczności w sieci powiązań wspólną dyrekcją przedsiębiorstw notowanych na polskim rynku kapitałowym.

Wykrycie silnej struktury społeczności sieci przedsiębiorstw na polskim rynku kapitałowym może być pomocne w identyfikacji różnic w określonych jej obszarach. Szczególnie dotyczy to kwestii związanej z przepływem informacji o przedsiębiorstwach w sieci. Występujący przepływ informacji w ramach danej społeczności może dotyczyć w szerszym zakresie przedsiębiorstw z tej grupy, co w konsekwencji prowadzi do redundancji informacji, oraz w mniejszym zakresie odnośnie spółek spoza tejże społeczności. Istotnym zagadnieniem stanowiąc może identyfikacja w poszczególnych

grupach przedsiębiorstw łączników (ang. *bridges*), którzy posiadają relacje ze spółkami spoza swojej społeczności i w ten sposób kontrolując do pewnego stopnia przepływ informacji wychodzących i napływających do reprezentowanej grupy. Kontrola przepływu informacji pomiędzy społecznościami a w konsekwencji pomiędzy poszczególnymi spółkami może być kluczowym elementem uzyskania przewagi. W tym miejscu warto podkreślić, że spółki centra w ramach danej społeczności stanowiące najbardziej usieciowione przedsiębiorstwa w swoich grupach (identyfikowane na podstawie centralności społeczności – por. tabela 2) niekoniecznie muszą być w uprzywilejowanej pozycji w zakresie kontroli przepływu informacji w całej sieci. Ponadto utrzymywanie dużej ilości relacji w ramach danej społeczności powoduje otrzymywanie redundantnych informacji.

Należy wskazać, że nie zaobserwowano istotnych statystycznie różnic pomiędzy wyszczególnionymi grupami w średnich wartościach stopnia relacji. Jednoczynnikowa analiza wariancji (ANOVA), nie prezentowana w pracy, chociaż nie pozwala na odrzucenie hipotezy zerowej o równościach wartości średnich stopnia relacji pomiędzy poszczególnymi społecznościami, względem hipotezy alternatywnej mówiącej, że co najmniej 2 grupy przedsiębiorstw różnią się względem średniej wartości stopnia relacji ($F(18; 499) = 6,347, p = 0,01$). Jednakże poszerzona analiza w zakresie porównań wielokrotnych z wykorzystaniem testu Scheffego (test typu post-hoc), wykazała, że ze wszystkich 171 możliwych kombinacji 19 grup ($n*(n-1)/2 = 171$), jedynie w sześciu przypadkach występuje istotna statystycznie różnica w wartościach średnich stopnia relacji (w każdym przypadku powtarza się społeczność nr 5, i jako jedyna wyróżnia się pod tym względem). Zatem stopień relacji nie stanowi czynnika wyróżniającego strukturę społeczności. Poszukiwanie czynników odpowiadających za formowanie silnej struktury społeczności sieci powiązań przedsiębiorstw na polskim rynku kapitałowym może stanowić przedmiot dalszych badań.

LITERATURA

- Albert R., Barabasi A. L., (2002), Statistical Mechanics of Complex Networks, *Reviews of Modern Physics*, 74 (1), 47–97.
- Blondel V. D., Guillaume J.-L., Lambiotte R., Lefebvre E., (2008), Fast Unfolding of Communities in Large Networks, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008 (10), P10008-1.
- Caldarelli G., (2013), *Scale-Free Networks. Complex Webs in Nature and Technology*, Oxford University Press, Oxford.
- Clauset A., Newman M. E. J, Moore C., (2004), Finding Community Structure in Very Large Networks, *Physical Review E*, 70, 066111.
- Collingsworth B., Menezes R., (2014), A Self-organized Approach for Detecting Communities in Networks, *Social Network Analysis & Mining*, 4 (1), 1–12.
- Dorogovtsev S., (2010), *Lectures on Complex Networks*, Oxford University Press, Oxford.
- Fortunato S., (2010), Community Detection in Graphs, *Physics Reports*, 486 (3), 75–174.
- Good B., de Montjoye Y.-A., Clauset A., (2010), The Performance of Modularity maximization in Practical Context, *Physical Review E*, 81, 046106.

- Guimera R., Sales-Pardo M., Amaral L., (2004), Modularity form Fluctuations in Random Graphs and Complex Networks, *Physical Review E*, 70, 025101(R).
- Henning M., Brandes U., Pfeiffer J., Mergel I., (2012), *Studying Social Networks. A Guide to Empirical Reaserch*, Campus Verlag, Frankfurt/New York.
- Jia S., Gao L., Gao Y., Nastos J., Wang Y., Zhang X., Wang H., (2015), Defining and Identifying Cograph Communities in Complex Networks, *New Journal of Physics*, 17, 1–21.
- Kolaczyk E., *Statistical Analysis of Network Data. Methods and Models*, Springer, 2009.
- Newman M. E. J., (2006a), Modularity and Community Structure in Networks, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103 (23), 8577–8582.
- Newman M. E. J. (2006b), Finding Community Structure in Networks Using the Eigenvectors of Matrices, *Physical Review E*, 74 (3), 036104.
- Newman M. E. J., Girvan M., (2004), Finding and Evaluating Community Structure In Networks, *Physical Review E*, 69, 026113.
- Newman M. E. J., (2010), *Networks. An Introduction*, Oxford University Press, New York.
- Newman, M. E. J., (2004), Fast Algorithm for Detecting Community Structure in Networks, *Physical Review E*, 69, 066133.
- Newman M. E. J., Park J., (2003), Why Social Networks Are Different From Other Types of Networks, *Physical Review E*, 68, 036122.
- Palla G., Derenyi I., Farkas I., Vicsek T., (2005), Uncovering the Overlapping Community Structure of Complex Networks in Nature and Society, *Nature*, 435 (9), 814-8.
- Piccardi C., Calatroni L., Bertoni F., (2010), Communities in Italian Corporate Networks, *Physica A*, 389, 5247–5258.
- Radicchi F., Castellano C., Cecconi F., Loreto V., Parisi D., (2004), Defining and Identifying Communities In Networks, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101 (9), 2658–2663.
- Raghavan U. N., Albert R., Kumara S., (2007), Near Linear Time Algorithm To Detect Community Structure In Large-Scale Networks, *Physical Review E* 76, 036106.
- Reichard J., Bornholdt S., (2006), Statistical Mechanics of Community Detection, *Physical Review E*, 74, 016110.
- Schoorman, F. D., Bazerman M. H., Atkin R. S., (1981), Interlocking Directorates: A Strategy for Reducing Environmental Uncertainty, *Academy of Management Review*, 6, 243–251.
- Thadakamalla H., Kumara S., Albert R., (2008), Complexity and Large-Scale Networks, w: Ravindran A. R. (red.), *Operations Research and Management Science. Handbook*, Taylor and Francis Group, 11-1-11-33.
- Wakita K., Tsurumi T., (2007), Finding Community Structure in Mega-scale Social Networks, *working paper, arXiv:cs/0702048*, 1–9.
- Yang Y., Cai N. (2011), Interlocking Directorates and Firm's Diversification Strategy: Perspective of Strategy Learning, w: Dali M., (red.), *Innovative computing and information: Berlin, Springer-Verlag*, 87–94.

STRUKTURA SPOŁECZNOŚCI SIECI POWIĄZAŃ RAD DYREKTORÓW PRZEDSIĘBIORSTW NA POLSKIM RYNKU KAPITAŁOWYM

Streszczenie

W artykule podjęto problematykę struktury społeczności sieci przedsiębiorstw powiązanych wspólną dyrekcją. Badaniem objęto 518 przedsiębiorstw w ramach największego komponentu spośród łącznie 902 przedsiębiorstw notowanych na głównym rynku Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie oraz na rynku NewConnect pod koniec 2014 r. Oceny siły struktury społeczności dokonano za pomocą funkcji

jakości podziału Q , obliczoną dla siedmiu podziałów przedsiębiorstw stosując odpowiednio odmienne algorytmy. Przeprowadzona analiza pozwoliła stwierdzić występowanie silnej struktury społeczności w sieci powiązań przedsiębiorstw na polskim rynku kapitałowym.

Słowa kluczowe: struktura społeczności, funkcja jakości podziału, wspólna dyrekcja, sieć

COMMUNITY STRUCTURE IN THE BOARDS NETWORK OF ENTERPRISES ON POLISH CAPITAL MARKET

Abstract

The article looks at the community structure in the network of interlocking directorates. The study covered 518 enterprises within the largest component of the total of 902 companies listed on the main market at the Warsaw Stock Exchange and on the NewConnect at the end of 2014. The strength of the community structure was assessed using the distribution function for quality (modularity), calculated for seven divisions of enterprises with different algorithms, respectively. The analysis led to the conclusion that the community structure existing in the board network between enterprises on Polish capital market is strong.

Keywords: community structure, modularity, interlocking directorate, network