

DARIUSZ KACPRZAK<sup>1</sup>

## METODA FSAW OPARTA NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH<sup>2</sup>

### 1. WPROWADZENIE

Podjęcie decyzji stanowi integralną część codziennego życia człowieka. Jednak w złożonych procesach decyzyjnych wybór trafnej decyzji może okazać się zadaniem niezwykle trudnym. Wówczas procesy te wymagają wsparcia ze strony metod i narzędzi, które dysponują gotowymi procedurami postępowania w celu zmniejszenia niepewności, rozwiązania konfliktów czy też wskazania odpowiedniego rankingu proponowanych rozwiązań. Do takich metod możemy zaliczyć metody wielokryterialne (MCDM – ang. *Multi-Criteria Decision Making*). Te z kolei możemy podzielić na dwie grupy: wieloatrybutowe podejmowanie decyzji (MADM – ang. *Multi-Attribute Decision Making*) oraz wieloobiektywne podejmowanie decyzji (MODM – ang. *Multi-Objective Decision Making*) (Abdullah, Adawiyah, 2014).

W literaturze można znaleźć wiele różnorodnych metod pozwalających rozwiązywać dyskretne problemy wielokryterialne. Szeroki przegląd metod oraz ich wybranych zastosowań można znaleźć m.in. w pracach Trzaskalika (2014a, 2014b).

Jedną z najprostszych i najczęściej stosowanych metod wieloatrybutowych jest metoda SAW (ang. *Simple Additive Weighting*). Szeroki zakres informacji na temat własności i odmian metody SAW można znaleźć m.in. u Roszkowskiej i Brzostowskiego (Roszkowska, Brzostowski, 2014). Klasyczna jej wersja oparta jest na macierzy decyzyjnej, której elementami są liczby rzeczywiste. Jednak powszechnie w tej metodzie wykorzystuje się również wypukłe liczby rozmyte otrzymując rozmytą SAW (FSAW – ang. *Fuzzy Simple Additive Weighting*). Celem pracy jest zastosowanie modelu skierowanych liczb rozmytych (OFN – ang. *Ordered Fuzzy Numbers*) w metodzie FSAW. Dodatkowa własność OFN – skierowanie – pozwala wówczas na natychmiastową identyfikację typu kryterium.

Praca składa się z pięciu części. W drugiej zaprezentowano podstawowe informacje na temat modelu skierowanych liczb rozmytych oraz popularnych metod ich defuzyfikacji. W części trzeciej przedstawiono rozmytą metodę SAW wykorzystującą skierowane liczby rozmyte. Kolejna, czwarta część, prezentuje dwa ekonomiczne przykłady zastosowania prezentowanej metody do zagadnień wyboru. Praca kończy się podsumowaniem.

---

<sup>1</sup> Politechnika Białostocka, Wydział Informatyki, Katedra Matematyki, ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok, Polska, e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl.

<sup>2</sup> Praca wykonana w ramach realizacji pracy statutowej S/WI/2/2011.

## 2. MODEL SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH

W 1965 roku w czasopiśmie „*Information and Control*” ukazała się praca Lotfi A. Zadeha pod tytułem „*Fuzzy Sets*” (Zadeh, 1965). Autor wprowadził w niej pojęcie zbiorów rozmytych, które dały możliwość matematycznego modelowania wielkości nieprecyzyjnych, niepewnych czy też wyrażonych w postaci opisowej (lingwistycznych). Znalazło to szerokie zastosowanie praktyczne, między innymi w zagadnieniach związanych ze sterowaniem i podejmowaniem decyzji.

Zbiorem rozmytym  $A$  na uniwersum  $X$ , nazywamy zbiór par:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A : X \rightarrow [0,1]\}, \quad (1)$$

gdzie  $\mu_A$  jest funkcją przynależności zbioru rozmytego  $A$ , która każdemu elementowi  $x \in X$  przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego  $A$ . Natomiast liczbą rozmytą  $A$  nazywamy wypukły, normalny zbiór rozmyty określony na uniwersum liczb rzeczywistych ( $X = \mathbb{R}$ ), którego funkcja przynależności  $\mu_A$  jest kawałkami ciągła (Dubois, Prade, 1980; Zimmermann, 2001).

Podstawowe działania arytmetyczne na liczbach rozmytych opierają się na zasadzie rozszerzenia (Zimmermann, 2001). Niech  $A$  i  $B$  będą liczbami rozmytymi o funkcjach przynależności odpowiednio  $\mu_A$  i  $\mu_B$  wówczas dodawanie (+), odejmowanie (-), mnożenie ( $\times$ ) i dzielenie ( $:$ ) wyglądają następująco:

$$\mu_{A*B}(z) = \max_{z=x*y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)), \quad (2)$$

gdzie  $* \in \{+, -, \times, :\}$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}$  (przy dzieleniu  $y \neq 0$ ).

Łatwo zauważyć, że działania arytmetyczne na liczbach rozmytych są dość skomplikowane. Wymagają bowiem wykonania wielu operacji zarówno na stopniach przynależności jak i na elementach nośników (zob. (2)). Dodatkowo zastosowania praktyczne liczb rozmytych pokazują, że ich funkcje przynależności zazwyczaj nie są dyskretne ale ciągłe oraz mają dość regularny kształt często w postaci trójkąta, trapezu, krzywej Gaussa itp. Oznacza to, że nie trzeba podawać stopni przynależności dla wszystkich elementów nośnika, a jedynie kilka parametrów, które jednoznacznie opiszą regularne funkcje przynależności.

Powyższe spostrzeżenia sprawiły, że Dubois i Prade zaproponowali specjalną postać liczb rozmytych nazywaną reprezentacją typu  $LR$  (Dubois, Prade, 1980), która znacznie poprawia efektywność wykonywanych działań arytmetycznych. Liczba rozmyta  $A$  jest liczbą rozmytą typu  $LR$ , jeżeli jej funkcja przynależności ma postać:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_A - x}{\alpha_A}\right) & \text{gdy } x \leq m_A \\ R\left(\frac{x - m_A}{\beta_A}\right) & \text{gdy } x \geq m_A \end{cases}, \quad (3)$$

gdzie  $L$  i  $R$  są funkcjami odniesienia,  $m_A$  jest liczbą rzeczywistą nazywaną wartością średnią ( $\mu_A(m_A) = 1$ ), natomiast  $\alpha_A > 0$  i  $\beta_A > 0$  są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, zwanymi odpowiednio rozrzutami lewo- i prawostronnym.

Funkcję przynależności liczby rozmytej  $A$  typu  $LR$  charakteryzują trzy parametry  $m_A$ ,  $\alpha_A$  i  $\beta_A$  (zob. (3)), co pozwala ją zapisać w postaci  $A = (m_A; \alpha_A; \beta_A)$ . Wówczas podstawowe działania arytmetyczne na liczbach rozmytych typu  $LR$  sprowadzają się do operacji na tych trzech parametrach. Na przykład jeżeli dane są liczby rozmyte  $A = (m_A; \alpha_A; \beta_A)$  i  $B = (m_B; \alpha_B; \beta_B)$  wówczas ich suma ma postać:

$$A + B = (m_A + m_B; \alpha_A + \alpha_B; \beta_A + \beta_B). \quad (4)$$

Reguła (4) obrazuje jak wygląda przyspieszenie i ułatwienie wykonywania działań na liczbach rozmytych typu  $LR$  (w tym przypadku dodawanie). Jednak, jak pokazali Dubois i Prade (Dubois, Prade, 1980), dokładne formuły można uzyskać tylko dla dodawania i odejmowania, natomiast w przypadku mnożenia i dzielenia zaproponowali przybliżone wyrażenia.

Model liczb rozmytych zaproponowany przez Zadeha (Zadeh, 1965) oraz jego późniejsza modyfikacja tzw. model  $LR$  (Dubois, Prade, 1980), posiadają kilka słabości, które ograniczają ich zastosowanie w niektórych dziedzinach, np. w modelowaniu ekonomicznym. Niedoskonałości te wynikają przede wszystkim z określenia działań arytmetycznych na tych liczbach. Powodują one powiększanie nośnika (zob. (2) i (4)) oraz brak elementów przeciwnych względem dodawania i odwrotnych względem mnożenia. Skutkuje to brakiem możliwości rozwiązywania prostych równań  $A + X = C$  oraz  $A \cdot X = C$ , gdzie  $A$  i  $C$  są ustalonymi liczbami rozmytymi. Dodatkowo, jeżeli nośnik liczby  $A$  jest szerszy niż nośnik liczby  $C$  to takie rozwiązanie nie istnieje.

Wspomnianych powyżej ograniczeń pozbawiony jest nowy model liczb rozmytych – skierowane liczby rozmyte. Został on zaproponowany w 2002 roku przez W. Kosińskiego, P. Prokopowicza i D. Ślęzaka (Kosiński i in., 2002; Kosiński i in., 2003; Kosiński, Prokopowicz, 2004). Arytmetyka działań w tym modelu jest analogiczna do działań na liczbach rzeczywistych, które stają się szczególnym przypadkiem OFN.

Skierowaną liczbą rozmytą  $A$  nazywamy uporządkowaną parę funkcji ciągłych

$$A = (f_A, g_A), \quad (5)$$

gdzie

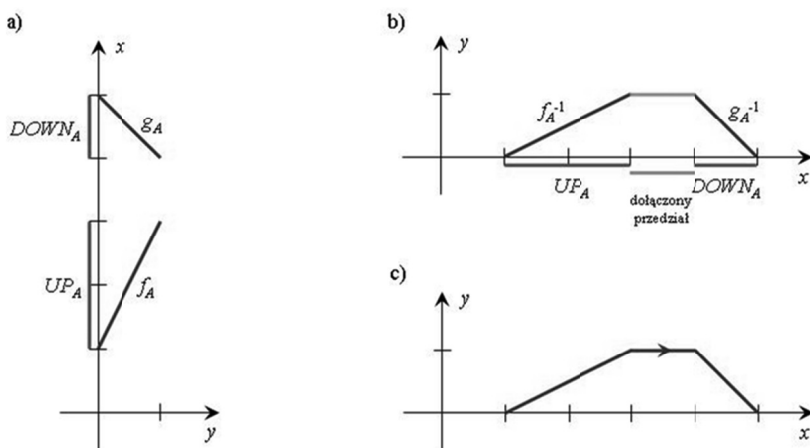
$$f_A, g_A: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (6)$$

Poszczególne funkcje skierowanej liczby rozmytej nazywamy odpowiednio:  $f_A$  – częścią wznoszącą ( $UP$ ),  $g_A$  – częścią opadającą ( $DOWN$ ) (zob. rysunek 1a). Ponieważ obie te funkcje są ciągłe, to ich obrazy są ograniczonymi przedziałami odpowiednio  $UP_A$  i  $DOWN_A$ , których granice oznaczamy następująco  $UP_A = (f_A(0), f_A(1))$  oraz

$DOWN_A = (g_A(1), g_A(0))$ . Na rysunku 1a przedstawiono ilustrację graficzną skierowanej liczby rozmytej, gdzie  $y$  jest argumentem funkcji  $f_A$  i  $g_A$ , natomiast  $x$  wartością tych funkcji. Do zbiorów  $UP_A$  oraz  $DOWN_A$  dodajemy na przedziale  $[f_A(1), g_A(1)]$  (przedział ten może być jednoelementowy) funkcję stałą ( $CONST$ ) równą 1 (warunek normalności). Wówczas zbiór  $UP_A \cup [f_A(1), g_A(1)] \cup DOWN_A$  tworzy jeden przedział (nośnik liczby  $A$ ). Jeżeli funkcje  $f_A$  i  $g_A$  są ściśle monotoniczne, istnieją do nich funkcje odwrotne  $f_A^{-1}$  i  $g_A^{-1}$  określone na odpowiednich przedziałach  $UP_A$  i  $DOWN_A$  (zob. rysunek 1b). Wówczas możemy określić funkcję przynależności  $\mu_A$  skierowanej liczby rozmytej  $A$  w następujący sposób (Kacprzak, 2008; Kacprzak, 2010):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin [f_A(0), g_A(0)] \\ f_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in UP_A \\ 1 & \text{gdy } x \in [f_A(1), g_A(1)] \\ g_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in DOWN_A \end{cases} \quad (7)$$

Tak określone liczby rozmyte nawiązują do wypukłych liczb rozmytych (CFN – ang. *Convex Fuzzy Numbers*), są jednak wyposażone w dodatkową własność zaznaczoną strzałką – skierowanie (zob. rysunek 1c). Graficznie liczba  $(f_A, g_A)$  nie różni się od liczby  $(g_A, f_A)$ , jednak w rzeczywistości są to dwie różne liczby, różniące się skierowaniem.



Rysunek 1. a) Przykładowa skierowana liczba rozmyta,

- b) skierowana liczba rozmyta przedstawiona w sposób nawiązujący do wypukłych liczb rozmytych,  
c) strzałka przedstawiająca porządek odwróconych funkcji i orientację skierowanej liczby rozmytej

Źródło: Kosiński i inni (2002).

Szczególnym przypadkiem skierowanych liczb rozmytych są liczby rzeczywiste. W modelu OFN są one utożsamiane z parą funkcji stałych. Dokładniej, liczba  $r \in \mathbb{R}$  jest zapisywana jako skierowana liczba rozmyta postaci  $r = (r^*, r^*)$ , gdzie  $r^*(y) = r$  dla  $y \in [0, 1]$ .

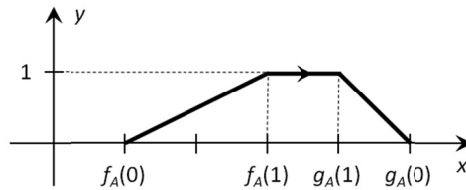
Podstawowe działania arytmetyczne, czyli dodawanie (+), odejmowanie (-), mnożenie ( $\times$ ) i dzielenie ( $:$ ), na skierowanych liczbach rozmytych określone są następująco. Niech  $A = (f_A, g_A)$  i  $B = (f_B, g_B)$  będą skierowanymi liczbami rozmytymi. Wówczas liczba  $C = (f_C, g_C)$  jest wynikiem działania (\*) na liczbach  $A$  i  $B$  ( $C = A * B$ ), jeżeli:

$$\forall y \in [0,1] [f_A(y) * f_B(y) = f_C(y) \text{ i } g_A(y) * g_B(y) = g_C(y)]. \quad (8)$$

Działanie (\*) oznacza jedno z podstawowych działań arytmetycznych. W przypadku dzielenia dodatkowo musi być spełniony warunek, że  $\forall y \in [0,1] f_B(y) \neq 0$  i  $g_B(y) \neq 0$ . Zbiór skierowanych liczb rozmytych z tak określonymi działaniami ma strukturę przestrzeni liniowo-topologicznej (Kosiński, Prokopowicz, 2004).

W określeniu funkcji przynależności skierowanej liczby rozmytej (7) pojawiają się cztery liczby rzeczywiste  $f_A(0)$ ,  $f_A(1)$ ,  $g_A(1)$  i  $g_A(0)$ , które w sposób jednoznaczny opisują tę liczbę. Wynika stąd, że skierowaną liczbę rozmytą można reprezentować za pomocą tych czterech elementów (zob. rysunek 2):

$$A = (f_A(0); f_A(1); g_A(1); g_A(0)). \quad (9)$$



Rysunek 2. Przykładowa OFN wraz z charakterystycznymi punktami

Źródło: Kacprzak (2010).

Taka reprezentacja OFN umożliwiła szybkie wykonywanie działań arytmetycznych na skierowanych liczbach rozmytych. Teraz określimy działania, które będą użyte w dalszej części pracy. Niech  $A = (f_A(0); f_A(1); g_A(1); g_A(0))$  i  $B = (f_B(0); f_B(1); g_B(1); g_B(0))$  będą skierowanymi liczbami rozmytymi oraz  $r \in \mathbb{R}$ . Wówczas dodawanie skierowanych liczb rozmytych  $A$  i  $B$  określamy następująco:

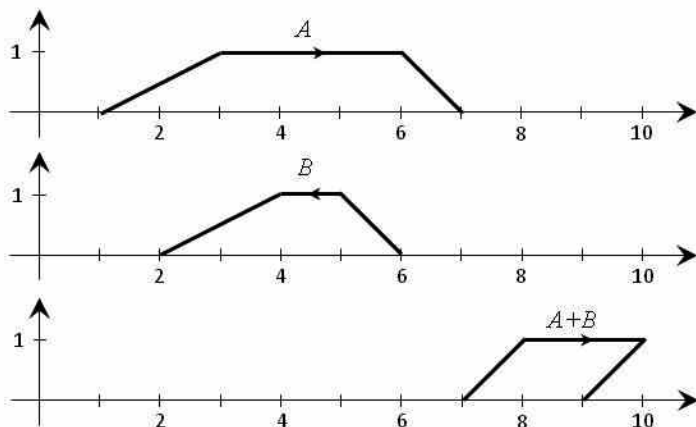
$$A + B = (f_A(0) + f_B(0); f_A(1) + f_B(1); g_A(1) + g_B(1); g_A(0) + g_B(0)), \quad (10)$$

natomiast mnożenie skierowanej liczby rozmytej  $A$  przez liczbę rzeczywistą  $r$  opisane jest regułą:

$$r \cdot A = (r \cdot f_A(0); r \cdot f_A(1); r \cdot g_A(1); r \cdot g_A(0)). \quad (11)$$

Warto w tym miejscu nadmienić, że wykonując działania arytmetyczne na skierowanych liczbach rozmytych możemy jako wynik uzyskać tzw. liczby niewłaściwe

(Kosiński i in., 2003), nie będące skierowanymi liczbami rozmytymi (zob. rysunek 3), których interpretacja jest trudna.



Rysunek 3. Dwie trapezowe skierowane liczby rozmyte  $A = (1; 3; 6; 7)$  i  $B = (6; 5; 4; 2)$  oraz „niewłaściwa” liczba będąca ich sumą  $A + B = (7; 8; 10; 9)$

Źródło: opracowanie własne.

W wielu praktycznych zastosowaniach liczb rozmytych, np. w regulatorach rozmytych czy w zagadnieniach związanych z podejmowaniem decyzji, ważną rolę pełnią funkcje, które liczbie rozmytej (skierowanej liczbie rozmytej) przyporządkowują liczbę rzeczywistą. Operacja ta nosi nazwę defuzyfikacji i jest zdefiniowana następująco: odwzorowanie  $\phi$  z przestrzeni skierowanych liczb rozmytych w  $\mathbb{R}$  nazywamy operacją defuzyfikacji (defuzyfikatorem), jeżeli dla dowolnej skierowanej liczby rozmytej  $A$  oraz dowolnej liczby rzeczywistej  $r \in \mathbb{R}$  spełnia warunki:

- $\phi(r)$ ,
- $\phi(A + r) = \phi(A) + r$ ,
- $\phi(r \cdot A) = r \cdot \phi(A)$ .

Niech  $A = (f_A, g_A)$  będzie skierowaną liczbą rozmytą. Wśród popularnych defuzyfikatorów OFN (niektóre adaptowane z modelu wypukłych liczb rozmytych) możemy wyróżnić (Kosiński, Wilczyńska-Sztyma, 2010):

- pierwsze maksimum (first of maximum) –  $\phi_{FOM}$

$$\phi_{FOM}(A) = f_A(1), \quad (12)$$

- ostatnie maksimum (last of maximum) –  $\phi_{LOM}$

$$\phi_{LOM}(A) = g_A(1), \quad (13)$$

- środek maksimum (middle of maximum) –  $\phi_{MOM}$

$$\phi_{MOM}(A) = \frac{f_A(1) + g_A(1)}{2}, \quad (14)$$

- losowe maksimum (random choice of maximum) –  $\phi_{RCOM}$

$$\phi_{RCOM}(A) = \lambda \cdot f_A(1) + (1 - \lambda) \cdot g_A(1), \text{ gdzie } \lambda \in [0,1], \quad (15)$$

- środek ciężkości (center of gravity) –  $\phi_{CoG}$

$$\phi_{CoG}(A) = \frac{\int_0^1 \frac{f_A(s) + g_A(s)}{2} \cdot |f_A(s) - g_A(s)| ds}{\int_0^1 |f_A(s) - g_A(s)| ds}, \quad (16)$$

- średnia geometryczna (geometrical mean) –  $\phi_{GM}$

$$\phi_{GM}(A) = \frac{g_A(0) \cdot g_A(1) - f_A(0) \cdot f_A(1)}{[g_A(0) + g_A(1)] - [f_A(0) + f_A(1)]}. \quad (17)$$

Praktyczne zastosowanie konkretnego defuzyfikatora zależy od analizowanego problemu oraz preferencji decydenta.

W kolejnej części skierowane liczby rozmyte oraz ich defuzyfikatory zostaną wykorzystane w rozmytej metodzie SAW.

### 3. ROZMYTA METODA SAW WYKORZYSTUJĄCA OFN

Metody wspomagające rozwiązywanie wieloatrybutowych problemów decyzyjnych dostarczają narzędzi do tworzenia rankingów wariantów decyzyjnych w zależności od systemu preferencji decydenta. W metodach tych zbiór danych stanowią:

- zbiór wariantów decyzyjnych, z których decydent chce wybrać najlepszy,
- zbiór kryteriów względem których oceniane są rozważane warianty decyzyjne,
- wektor wag określający istotność poszczególnych kryteriów,
- macierz decyzyjna złożona z wartości ocen poszczególnych wariantów decyzyjnych względem kolejnych kryteriów.

Na podstawie powyższych danych tworzony jest ranking liniowy szeregujący analizowane warianty decyzyjne od najlepszego (najwyższa pozycja rankingowa) do najslabszego (najniższa pozycja rankingowa).

Dowolny wieloatrybutowy problem decyzyjny można przedstawić w postaci macierzy decyzyjnej (zob. tabela 1). W macierzy tej poszczególne symbole oznaczają:

- $K_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) –  $j$ -te kryterium decyzyjne,
- $W_j$  ( $W_j > 0, j = 1, \dots, N$ ) – waga  $j$ -tego kryterium, spełniająca zależność  $W_1 + W_2 + \dots + W_N = 1$ ,
- $H_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) –  $i$ -ty wariant decyzyjny,
- $x_{ij}^*$  ( $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N : x_{ij}^* \in \mathbb{R}$ ) – wartość (ocena)  $i$ -tego wariantu decyzyjnego ze względu na  $j$ -te kryterium.

Tabela 1.

Opis problemu decyzyjnego w postaci macierzy decyzyjnej

Warianty decyzyjne	Kryteria			
	$K1$	$K2$	...	$KN$
$H1$	$x_{11}^*$	$x_{12}^*$	...	$x_{1N}^*$
$H2$	$x_{21}^*$	$x_{22}^*$	...	$x_{2N}^*$
...	...	...	...	...
$HM$	$x_{M1}^*$	$x_{M2}^*$	...	$x_{MN}^*$
Wagi kryteriów	$W1$	$W2$	...	$WN$

Źródło: Rudnik, Kacprzak (2015).

Jak już wspomniano we wstępie, jedną z najprostszych i najczęściej stosowanych metod wieloatrybutowych jest metoda SAW. W metodzie tej dokonuje się podziału kryteriów na dwie grupy: typu „zysk” (im więcej, tym lepiej) oraz typu „koszt” (im mniej, tym lepiej). Następnie normalizuje się elementy macierzy decyzyjnej zapewniając porównywalności wartości ocen poszczególnych wariantów decyzyjnych względem kolejnych kryteriów (Hwang, Yoon, 1981; Chen, Hwang, 1992). W kolejnym kroku bierze się kombinacje liniowe elementów znormalizowanej macierzy decyzyjnej odpowiadających kolejnym wariantom decyzyjnym oraz elementów wektora wag. Uporządkowanie liniowe uzyskanych zagregowanych wartości tworzy ranking i wskazuje najlepszy wariant decyzyjny.

W klasycznym algorytmie SAW przyjmuje się, że elementy macierzy decyzyjnej są wyrażone za pomocą liczb rzeczywistych. Aby zapewnić jednolity charakter poszczególnych kryteriów oraz możliwość porównywania tych wartości dokonuje się ich normalizacji. W przypadku kryterium typu „zysk” możemy użyć normalizacji postaci (Hwang, Yoon, 1981):

$$r_{ij}^* = \frac{x_{ij}^*}{\max_i x_{ij}^*}, \quad (18)$$

a typu „koszt”

$$r_{ij}^* = \frac{\min_i x_{ij}^*}{x_{ij}^*}. \quad (19)$$

Następnie każdemu wariantowi  $H_i$  przypisujemy kombinację liniową wektora wago-owego oraz znormalizowanych wartości wariantu decyzyjnego (Hwang, Yoon, 1981):

$$S(H_i) = \sum_{n=1}^N W_j r_{ij}^* \quad (m = 1, \dots, M). \quad (20)$$



Im wyższa wartość funkcji agregującej  $S(H_i)$  danej wzorem (20), tym wariant  $H_i$  jest bardziej preferowany (zajmuje wyższą pozycję w rankingu).

W rzeczywistości oceny wariantów decyzyjnych względem kryteriów mogą być nieprecyzyjne lub też informacje mogą być trudne do oceny w sposób dokładny w formie ilościowej. W tej sytuacji zasadne wydaje się zastosowanie podejścia lingwistycznego wykorzystującego język naturalny zamiast liczb (Herrera, Herrera-Viedma, 2000). Zmienne lingwistyczne będące elementami macierzy decyzyjnej można opisać za pomocą liczb rozmytych. W zagadnieniach praktycznych najczęściej wykorzystuje się trójkątne liczby rozmyte (liczby postaci (3), gdzie funkcje  $L$  i  $R$  są liniowe). Następnie liczby rozmyte podlegają normalizacji, zapewniającej ich porównywalność (szeroki wykaz formuł normalizacji można znaleźć m.in. u Hwang, Yoon (1981)). Jako wynik działania metody SAW, zgodnie ze wzorem (20), również uzyskamy liczby rozmyte, które po defuzyfikacji utworzą ranking i wskażą wariant najlepszy. Przedstawioną metodę nazywa się rozmytą metodą SAW (fuzzy SAW – FSAW).

W pracy w metodzie FSAW zostaną wykorzystane skierowane liczby rozmyte oraz ich defuzyfikatory (12)–(17) opisane w części 2. Użycie OFN pozwala na błyskawiczne rozróżnianie typu kryteriów – „zysk” czy „strata”. Jest to możliwe dzięki wykorzystaniu skierowania OFN podczas przydzielania rozmytych ocen wariantom decyzyjnym względem analizowanych kryteriów.

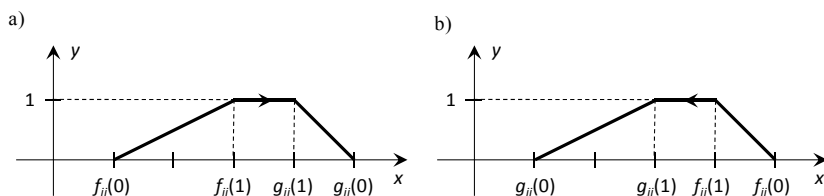
Proponowana metoda FSAW bazująca na skierowanych liczbach rozmytych oparta jest na następujących etapach:

**ETAP 1.** Utworzenie rozmytej macierzy decyzyjnej  $X$ :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M1} & x_{M2} & \cdots & x_{MN} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

gdzie  $x_{ij} = (f_{ij}^*(0); f_{ij}^*(1); g_{ij}(1); g_{ij}(0))$  ( $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$ ) są skierowanymi liczbami rozmytymi. Elementy rozmytej macierzy decyzyjnej  $X$  powstają na podstawie zamiany ostrych ocen  $x_{ij}^*$  (np. opinii ekspertów) na oceny wyrażone za pomocą skierowanych liczb rozmytych  $x_{ij}$ . Transformacji dokonuje się poprzez rozszerzenie nośnika oceny (przedziału  $[f_{ij}^*(0), g_{ij}(0)]$ ) i jądra oceny (przedziału  $[f_{ij}^*(1), g_{ij}(1)]$ ) do wartości estymowanych lub założonych przedziałów niepewności oceny.

W tym miejscu należy zaznaczyć, że dodatkowa własność skierowanych liczb rozmytych – skierowanie – pozwala na wskazanie typu kryterium. W przypadku kryterium typu „zysk” – skierowanie liczby rozmytej posiada zwrot w kierunku nieskończoności, oznaczając, że im większa wartość, tym lepiej (zob. rysunek 4a). W przypadku kryterium typu „strata” skierowanie liczby rozmytej posiada zwrot w kierunku wartości 0, wskazując, że im mniejsza wartość, tym lepiej (zob. rysunek 4b).



Rysunek 4. Przykładowe skierowane liczby rozmyte obrazujące odzwierciedlenie typu kryterium w skierowaniu: a) kryterium typu „zysk”, b) kryterium typu „strata”

Źródło: opracowanie własne.

**ETAP 2.** Utworzenie znormalizowanej rozmytej macierzy decyzyjnej  $Z$  (Rudnik, Kacprzak, 2015):

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{M1} & Z_{M2} & \cdots & Z_{MN} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

gdzie

$$Z_{ij} = \begin{cases} \left( \frac{f_{ij}(0)}{\max_i g_{ij}(0)}, \frac{f_{ij}(1)}{\max_i g_{ij}(0)}, \frac{g_{ij}(1)}{\max_i g_{ij}(0)}, \frac{g_{ij}(0)}{\max_i g_{ij}(0)} \right), & \text{gdy } K_j \text{ – typu „zysk”} \\ \left( \frac{\min_i g_{ij}(0)}{f_{ij}(0)}, \frac{\min_i g_{ij}(0)}{f_{ij}(1)}, \frac{\min_i g_{ij}(0)}{g_{ij}(1)}, \frac{\min_i g_{ij}(0)}{g_{ij}(0)} \right), & \text{gdy } K_j \text{ – typu „strata”}. \end{cases} \quad (23)$$

**ETAP 3.** Wyznaczenie wartości funkcji agregującej dla każdego wariantu decyzyjnego jako kombinacji liniowej elementów znormalizowanej macierzy decyzyjnej  $Z$  oraz elementów wektora wag:

$$FS(H_i) = \sum_{j=1}^N z_{ij} \cdot W_j \text{ dla każdego } i = 1, \dots, M. \quad (24)$$

Zauważmy, że w wyniku normalizacji (ETAP 2) skierowanie dla kryterium typu „strata” zmienia kierunek. Zapewnia to, że w wyniku agregacji skierowanych liczb rozmytych trójkątnych lub trapezowych (najczęściej takie liczby są wykorzystywane w analizach, podobnie jak dla modelu wypukłych liczb rozmytych) liczba wynikowa będzie również trójkątna lub trapezowa, a nie np. niewłaściwa (zob. rysunek 3).

**ETAP 4.** Warianty decyzyjne porządkujemy liniowo ze względu na wartości defuzyfikacji wyników działania funkcji agregującej (24). Wyższe wartości  $\phi(FS(H_i))$  oznaczają, że wariant decyzyjny  $H_i$  zajmuje wyższą pozycję w rankingu (jest bardziej preferowany).

W kolejnej części zostaną zaprezentowane przykłady wykorzystania rozmytej metody SAW bazującej na skierowanych liczbach rozmytych w procesie wspomaganego decyzyjnego.

## 4. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA OFN W METODZIE FSAW

Zaprezentowaną w części 3 metodą FSAW wykorzystującą skierowane liczby rozmyte zastosujemy do wyboru samochodu w autokomisie oraz miejsca na spędzenie letnich wakacji.

**Przykład 1.** Wybór samochodu w autokomisie

Rozważmy problem zakupu używanego samochodu w autokomisie. Decydent po wstępnej selekcji ograniczył swoje rozważania do pięciu pojazdów:  $H_1$  – AUDI,  $H_2$  – BMW,  $H_3$  – FORD,  $H_4$  – OPEL oraz  $H_5$  – VW. Ponadto decydent określił pięć kryteriów względem których samochody będą oceniane oraz wektor wag określający istotność poszczególnych kryteriów. Do wyspecyfikowanych kryteriów zaliczył:  $K_1$  – cena (w tys. zł.),  $K_2$  – wiek auta (w latach),  $K_3$  – koszty eksploatacji i utrzymania (w tys. na rok),  $K_4$  – poziom wyposażenia i udogodnień (skala 1..10, 1 – słabe, 10 – doskonałe) oraz  $K_5$  – łatwość odsprzedaży (skala 1..10, 1 – kłopotliwa, 10 – wysoka łatwość), natomiast wektor wag ma postać:

$$W = (0,3; 0,2; 0,3; 0,1; 0,1).$$

W tabeli 2. przedstawiono dane wejściowe. Zostały one określone na podstawie danych (uśrednionych) uzyskanych od pracowników różnych autokomisów. Następnie dane wejściowe zostały rozmyte i zapisane w postaci skierowanych liczb rozmytych w tabeli 3, z uwzględnieniem typu kryterium:  $K_1$ ,  $K_2$  i  $K_3$  są typu „strata”, natomiast  $K_4$  i  $K_5$  typu „zysk”. W tabeli 4 widać znormalizowane zgodnie z (23) wartości ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów. Z kolei tabela 5 pokazuje zagregowane wartości w postaci skierowanych liczb rozmytych wyznaczone zgodnie z (24) odpowiadające kolejnym samochodom. Tabela 6 zawiera wyniki zastosowania różnych typów dyfuzyfikatorów wyznaczonych na podstawie formuł (12)–(17) oraz rankingi utworzone na ich podstawie. Widać z niej, że niezależnie od zastosowanej metody defuzyfikacji ranking jest identyczny i ma postać:

$$\text{AUDI} < \text{BMW} < \text{VW} < \text{OPEL} < \text{FORD},$$

ponieważ  $H_1 < H_2 < H_5 < H_4 < H_3$ . Oznacza to, że decydent powinien się zdecydować na zakup używanego samochodu firmy FORD.

Tabela 2.

Dane wejściowe uzyskane od pracowników autokomisów

	$K1$	$K2$	$K3$	$K4$	$K5$
$H1$	30	10	6	9	8
$H2$	25	12	6	9	9
$H3$	12	8	2	5	6
$H4$	15	9	3	6	7
$H5$	22	10	5	7	8

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.

Rozmyte wartości ocen samochodów  $H_1, \dots, H_5$  względem kryteriów  $K_1, \dots, K_5$ 

	$K1$	$K2$	$K3$	$K4$	$K5$
$H1$	(33;31;29;27)	(11,5;10,5;9,5;8,5)	(7,5;6,5;5,5;4,5)	(7,5;8,5;9,5;10,5)	(6,5;7,5;8,5;9,5)
$H2$	(28;26;24;22)	(13,5;12,5;11,5;10,5)	(7,5;6,5;5,5;4,5)	(7,5;8,5;9,5;10,5)	(7,5;8,5;9,5;10,5)
$H3$	(15;13;11;9)	(9,5;8,5;7,5;6,5)	(3,5;2,5;1,5;0,5)	(3,5;4,5;5,5;6,5)	(4,5;5,5;6,5;7,5)
$H4$	(18;16;14;12)	(10,5;9,5;8,5;7,5)	(4,5;3,5;2,5;1,5)	(4,5;5,5;6,5;7,5)	(5,5;6,5;7,5;8,5)
$H5$	(25;23;21;19)	(11,5;10,5;9,5;8,5)	(6,5;5,5;4,5;3,5)	(5,5;6,5;7,5;8,5)	(6,5;7,5;8,5;9,5)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.

Znormalizowane wartości ocen samochodów  $H_1, \dots, H_5$  względem kryteriów  $K_1, \dots, K_5$ 

	$K1$	$K2$	$K3$	$K4$	$K5$
$H1$	(0,27;0,29;0,31;0,33)	(0,57;0,62;0,68;0,77)	(0,07;0,08;0,09;0,11)	(0,71;0,81;0,91;1,00)	(0,62;0,71;0,81;0,91)
$H2$	(0,32;0,35;0,38;0,41)	(0,48;0,52;0,57;0,62)	(0,07;0,08;0,09;0,11)	(0,71;0,81;0,91;1,00)	(0,71;0,81;0,91;1,00)
$H3$	(0,60;0,69;0,82;1,00)	(0,68;0,77;0,87;1,00)	(0,14;0,20;0,33;1,00)	(0,33;0,43;0,52;0,62)	(0,43;0,52;0,62;0,71)
$H4$	(0,50;0,56;0,64;0,75)	(0,62;0,68;0,77;0,87)	(0,11;0,14;0,20;0,33)	(0,43;0,52;0,62;0,71)	(0,52;0,62;0,71;0,81)
$H5$	(0,36;0,39;0,43;0,47)	(0,57;0,62;0,68;0,77)	(0,08;0,09;0,11;0,14)	(0,52;0,62;0,71;0,81)	(0,62;0,71;0,81;0,91)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5.

Zagregowane wyniki ocen samochodów  $H_1, \dots, H_5$  względem kryteriów  $K_1, \dots, K_5$ 

	$FS(H_m)$
$H_1$	(0,348;0,386;0,429;0,477)
$H_2$	(0,356;0,393;0,434;0,480)
$H_3$	(0,436;0,516;0,633;0,933)
$H_4$	(0,402;0,463;0,539;0,651)
$H_5$	(0,358;0,402;0,451;0,509)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6.

Wyniki defuzyfikacji oraz rankingi (w  $\phi_{RCOM}$  przyjęto  $\lambda = 0,1$ ,  $R$  – ranking)

	$\phi_{RCOM}$	$R$	$\phi_{RCOM}$	$R$	$\phi_{RCOM}$	$R$	$\phi_{RCOM}$	$R$	$\phi_{RCOM}$	$R$	$\phi_{RCOM}$	$R$
$H_1$	0,386	5	0,429	5	0,408	5	0,424	5	0,410	5	0,409	5
$H_2$	0,393	4	0,434	4	0,413	4	0,430	4	0,416	4	0,414	4
$H_3$	0,516	1	0,633	1	0,574	1	0,621	1	0,641	1	0,595	1
$H_4$	0,463	2	0,539	2	0,501	2	0,531	2	0,516	2	0,507	2
$H_5$	0,402	3	0,451	3	0,426	3	0,446	3	0,431	3	0,428	3

Źródło: opracowanie własne.

**Przykład 2.** Wybór miejsca na spędzenie letnich wakacji

Przykład 1 oparty był na liczbowych informacjach dotyczących ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów. Jednak ludzie bardzo często posługują się terminami języka naturalnego w trakcie dokonywania ocen. Poniższy przykład oparty będzie na takim podejściu lingwistycznym.

Typowa liczba terminów lingwistycznych wykorzystywanych do określenia rankingów wariantów decyzyjnych jest nieparzysta taka jak 7 czy 9 i nie większa niż 13 (Bonissone, 1982; Bonissone, Decker, 1986; Herrera, Herrera-Viedma, 2000). W przykładzie zastosowano 7-mio stopniową skalę lingwistyczną (zob. tabela 7).

Tabela 7.

Terminy lingwistyczne wykorzystywane do określenia rankingu wariantów decyzyjnych

Terminy lingwistyczne	Skrót	OFN w notacji (9)
Bardzo słaby	<i>BS</i>	(0,00;0,00;0,02;0,07)
Słaby	<i>S</i>	(0,04;0,10;0,18;0,23)
Średnio słaby	<i>SS</i>	(0,17;0,22;0,36;0,42)
Dostateczny	<i>DT</i>	(0,32;0,41;0,58;0,65)
Średnio dobry	<i>SD</i>	(0,58;0,63;0,80;0,86)
Dobry	<i>DB</i>	(0,72;0,78;0,92;0,97)
Bardzo dobry	<i>BD</i>	(0,93;0,98;1,00;1,00)

Źródło: opracowanie własne na podstawie Bonissone, Decker (1986) i Chen (2000).

Rozważmy przykład wyboru miejsca na spędzenie letnich wakacji. Decydent zrobił listę krajów oraz hoteli, które uznał za potencjalne miejsca wyjazdu. Po wstępnej selekcji decydentowi zostało pięć możliwości, z których chce wybrać najlepszą: *H1* – Cypr, *H2* – Egipt, *H3* – Grecja, *H4* – Hiszpania i *H5* – Turcja. Następnie każdy z hoteli został oceniony względem sześciu kryteriów wybranych przez decydenta: *K1* – cena pobytu, *K2* – pokój i serwis, *K3* – czas dojazdu do miejsca docelowego, *K4* – położenie hotelu i atrakcyjność okolicy, *K5* – gastronomia oraz *K6* – sport i rozrywka. Kryteria *K1* i *K3* są typu „strata”, natomiast kryteria *K2*, *K4*, *K5* i *K6* są typu „zysk”. Dodatkowo decydent określił istotność poszczególnych kryteriów otrzymując następujący wektor wag:

$$W = (0,1; 0,25; 0,05; 0,15; 0,3; 0,15).$$

W rolę ekspertów (respondentów) dokonujących oceny wcielili się uczestnicy wakacji spędzonych we wspomnianych hotelach. Na podstawie swoich odczuć i obserwacji dokonują oni oceny hotelu względem poszczególnych kryteriów za pomocą terminów lingwistycznych zawartych w tabeli 7. Następnie uzyskane opinie od respondentów są agregowane (np. za pomocą średniej czy dominanty). Wyniki ocen ekspertów są zawarte w tabeli 8, a w tabeli 9 zestawiono uzyskane zagregowane wyniki ocen hoteli względem kryteriów w postaci OFN. Tabela 10 pokazuje wyniki defuzyfikacji oraz rankingi hoteli.

Uzyskany ranking za pomocą rozmytej metody SAW ma postać:

$$\text{Turcja} < \text{Grecja} < \text{Cypr} < \text{Egipt} < \text{Hiszpania},$$

ponieważ  $H5 < H3 < H1 < H2 < H4$ . Wyjątkiem jest defuzyfikacja metodą *LOM*, gdzie w rankingu zamieniają się pozycjami Grecja i Cypr. Jednak wszystkie rankingi

wskazują na pierwszej pozycji wariant *H4*. Oznacza to, że decydent powinien spędzić wakacje w Hiszpanii.

Tabela 8.

Wyniki oceny hoteli względem kryteriów uzyskane od respondentów

	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>	<i>K4</i>	<i>K5</i>	<i>K6</i>
<i>H1</i>	<i>BD</i>	<i>DB</i>	<i>SD</i>	<i>SS</i>	<i>DT</i>	<i>DT</i>
<i>H2</i>	<i>SD</i>	<i>DB</i>	<i>DT</i>	<i>DB</i>	<i>SS</i>	<i>DB</i>
<i>H3</i>	<i>SD</i>	<i>DT</i>	<i>DB</i>	<i>SS</i>	<i>SD</i>	<i>SD</i>
<i>H4</i>	<i>SD</i>	<i>SD</i>	<i>DB</i>	<i>SD</i>	<i>DB</i>	<i>DT</i>
<i>H5</i>	<i>SD</i>	<i>DT</i>	<i>DB</i>	<i>DB</i>	<i>DT</i>	<i>SS</i>

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 9.

Zagregowane wyniki oceny hoteli względem kryteriów oraz ranking

	<i>FS(Hm)</i>			
<i>H1</i>	0,472	0,542	0,683	0,741
<i>H2</i>	0,521	0,579	0,718	0,778
<i>H3</i>	0,461	0,521	0,685	0,747
<i>H4</i>	0,590	0,650	0,806	0,867
<i>H5</i>	0,404	0,478	0,635	0,701

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 10.

Wyniki defuzyfikacji i ranking (w  $\phi_{RCOM}$  przyjęto  $\lambda = 0,1$ , *R* – ranking)

	$\phi_{RCOM}$	<i>R</i>	$\phi_{RCOM}$	<i>R</i>	$\phi_{RCOM}$	<i>R</i>	$\phi_{RCOM}$	<i>R</i>	$\phi_{RCOM}$	<i>R</i>	$\phi_{RCOM}$	<i>R</i>
<i>H1</i>	0,542	3	0,683	4	0,612	3	0,668	3	0,609	3	0,610	3
<i>H2</i>	0,579	2	0,718	2	0,648	2	0,704	2	0,649	2	0,649	2
<i>H3</i>	0,521	4	0,685	3	0,603	4	0,668	4	0,603	4	0,603	4
<i>H4</i>	0,650	1	0,806	1	0,728	1	0,790	1	0,728	1	0,728	1
<i>H5</i>	0,478	5	0,635	5	0,556	5	0,619	5	0,554	5	0,555	5

Źródło: opracowanie własne.

Warto na koniec zwrócić uwagę, że w prezentowanych przykładach uzyskany ranking był niezależny od zastosowanej metody defuzyfikacji (z wyjątkiem sytuacji wspomnianej powyżej). Może się zdarzyć, że różne defuzyfikatory będą generowały różne rankingi i wówczas zastosowana metoda defuzyfikacji powinna być określona na podstawie analizowanego problemu oraz preferencji decydenta.

## 5. PODSUMOWANIE

W artykule zaproponowano wykorzystanie skierowanych liczb rozmytych do wspomaganie procesu decyzyjnego rozmytą metodą SAW. Proponowane podejście skutecznie radzi sobie w sytuacjach niepewnych i niejednoznacznych informacji poprzez rozmywanie ocen wariantów decyzyjnych oraz w sytuacjach stosowania ocen języka naturalnego. Dodatkowo, własność skierowania w OFN pozwala na błyskawiczne rozróżnienie typu kryterium podczas analizy wariantów decyzyjnych. Przedstawione przykłady pokazują, że metoda ta jest doskonałym narzędziem wspomagającym rozwiązywanie złożonych problemów decyzyjnych pojawiających się w życiu codziennym. Może ona być doskonałą alternatywą dla metod wieloatrybutowych opartych na wypukłych liczbach rozmytych oraz skutecznym narzędziem wspomagającym proces podejmowania decyzji.

## LITERATURA

- Abdullah L., Adawiyah C. W. R., (2014), Simple Additive Weighting Methods of Multicriteria Decision Making and Applications: A Decade Review, *International Journal of Information Processing and Management*, 5 (1), 39–49.
- Bonissone P., (1982), A Fuzzy Sets Based Linguistic Approach: Theory and Applications, w: Gupta M. M., Sanchez E., (red.) *Approximate Reasoning in Decision Analysis*, North-Holland Publishing Company, 329–339.
- Bonissone P., Decker K., (1986), Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-off Precision and Complexity, in *Uncertainty in Artificial Intelligence*, L. Kanal, and J. Lemmer (red.), North-Holland Publishing Company, 217–247.
- Chen C. T., (2000), Extension of the TOPSIS for Group Decision Making Under Fuzzy Environment, *Fuzzy Sets and Systems*, 114 (1), 1–9.
- Chen S. J., Hwang C. L., (1992), *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin.
- Dubois D., Prade H., (1980), *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application*. Academic Press, New York.
- Herrera F., Herrera-Viedma E., (2000), Linguistic Decision Analysis: Steps for Solving Decision Problems Under Linguistic Information, *Fuzzy Sets and Systems*, 115 (1), 67–82.
- Hwang C. L., Yoon K., (1981), *Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications*, Springer, Berlin.
- Kacprzak D., (2008), Ewolucja liczb rozmytych. VII Konferencja naukowo-praktyczna: *Energia w nauce i technice*, Suwałki, 783–796.
- Kacprzak D., (2010), Skierowane liczby rozmyte w modelowaniu ekonomicznych. *Optimum – Studia Ekonomiczne*, 3, 263–281.



- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., (2002). Fuzzy Numbers with Algebraic Operations: Algorithmic Approach, w: Kłopotek M., Wierchoń S. T., Michalewicz M., (red.), *Proc. IIS'2002*, Sopot, Heidelberg: Physica Verlag, 311–320.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., (2003), Ordered Fuzzy Numbers, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematic*, 52 (3), 327–339.
- Kosiński W., Prokopowicz P., (2004), Algebra liczb rozmytych, *Matematyka Stosowana. Matematyka dla Społeczeństwa*, 5 (46), 37–63.
- Kosiński W., Wilczyńska-Sztyma D., (2010), Defuzzification and Implication within Ordered Fuzzy Numbers, w: *WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence*, Barcelona, 1073–1079.
- Roszkowska E., Brzostowski J., (2014), Wybrane własności procedury SAW w kontekście wspomaganie negocjacji, w: Trzaskalik T., (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko*, 14. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, 108–126.
- Rudnik K., Kacprzak D., (2015), Rozmyta metoda TOPSIS wykorzystująca skierowane liczby rozmyte. XVIII Konferencja *Innowacje w zarządzaniu i inżynierii produkcji*, Zakopane, 958–968.
- Trzaskalik T., (2014a), Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Przegląd metod i zastosowań, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Organizacja i Zarządzanie*, 74, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice, 231–263.
- Trzaskalik T., (2014b), *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Zadeh L. A., (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338–353.
- Zimmermann H. J., (2001), *Fuzzy Set Theory and Applications*, 4th Rev. ed. Boston: Kluwer Academic Publishers.

## METODA FSAW OPARTA NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH

### Streszczenie

W artykule zaproponowano nowe podejście do rozmytych wieloatrybutowych metod wspomaganie decyzji poprzez zastosowanie modelu skierowanych liczb rozmytych. Po prezentacji tego modelu, został on wykorzystany w rozmytej metodzie SAW. Skierowane liczby rozmyte pozwalają na błyskawiczne rozróżnienie typu kryterium, a przedstawione przykłady pokazują użyteczność proponowanej metody.

**Słowa kluczowe:** wieloatrybutowe podejmowanie decyzji, skierowane liczby rozmyte, defuzyfikacja, metoda FSAW

## FSAW METHOD USING ORDERED FUZZY NUMBERS

### Abstract

In the paper, a new approach to fuzzy Multi-Attribute Decision Making methods has been proposed, with the application of Ordered Fuzzy Numbers model. After the presentation of OFN model, it has been used as part of the fuzzy SAW method. Ordered fuzzy numbers allow to immediately distinguish between type of criteria, and the presented examples show the usefulness of the proposed method.

**Keywords:** Multi-Attribute Decision Making, Ordered Fuzzy Numbers, defuzzification, FSAW method