PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LX – ZESZYT 4 – 2013

EMIL PANEK

„SILNY" EFEKT MAGISTRALI W MODELU DYNAMIKI EKONOMICZNEJ TYPU GALE'A. ZAGADNIENIE WZROSTU DOCELOWEGO

1. WSTĘP

Artykuł nawiązuje do pracy Panek (2003, rozdz. 5) oraz Panek, Runka (2011). W pierwszej przedstawiono dowód tzw. „słabego" , a w drugiej" słabego" i „bardzo silnego" twierdzenia o magistrali w stacjonarnej gospodarce Gale'a. W pracy z 2003 r. w charakterze kryterium wzrostu przyjęto wartość produkcji, mierzonej w cenach równowagi von Neumanna, wytworzonej w końcowym okresie ustalonego horyzontu $T = \{0,1, \ldots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$. W artykule z 2011 r. rolę kryterium wzrostu gra mierzona w cenach równowagi von Neumanna wartość produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T.

W literaturze znana jest także pośrednia wersja tzw. „silnych" twierdzeń o magistrali[1]. Jednemu z takich twierdzeń poświęcony jest niniejszy artykuł. Dzięki warunkowi **(VI)** jego dowód jest prostszy od dowodów innych twierdzeń tego typu znanych z literatury. Przy dowodzie kluczową rolę gra oryginalny lemat 1. W charakterze kryterium wzrostu przyjęto, tak jak w pracy z 2003 r., mierzoną w cenach równowagi von Neumanna wartość produkcji wytworzonej w gospodarce w końcowym okresie t_1 horyzontu T. Obowiązują oznaczenia stosowane w obu wspomnianych wyżej pracach.

2. PRZESTRZEŃ PRODUKCYJNA GALE'A. RÓWNOWAGA VON NEUMANNA

W gospodarce Gale'a mamy n towarów, a jej możliwości wytwórcze opisuje tzw. przestrzeń produkcyjna $Z \subset R_+^{2n}$. Elementami przestrzeni Z są pary wektorów $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ nakładów (zużycia) x oraz wyników (produkcji) y. Zapis $(x, y) \in Z$ oznacza, że z nakładów x możliwe jest wytworzenie produkcji y. Przestrzeń produkcyjna Gale'a spełnia następujące warunki[2]:

---

[1] Zobacz m.in. Makarow, Rubinow (1973), McKenzie (1976), McKenzie (2005), Nikaido (1968, rozdz. IV), Takayama (1985, rozdz. 7), a z nowszych prac np. Khan, Piazza (2011). Obszerniejszą bibliografię zamieszczono w pracy Panek (2011).

[2] Z interpretacją ekonomiczną warunków (I) – (IV) można zapoznać się w pracy Panka (2003, rozdz. 5).

(I) $\forall (x^1, y^1) \in Z \quad \forall (x^2, y^2) \in Z \quad \forall \alpha, \beta \geq 0 \left(\alpha(x^1, y^1) + \beta(x^2, y^2) \in Z \right)$,

(II) $\forall\ (x, y) \in Z\ (\ x = 0 \Rightarrow y = 0\ )$,

(III) $\forall (x, y) \in Z \quad \forall x' \geqq x \quad \forall 0 \leqq y' \leqq y \quad \left((x', y') \in Z \right)$,

(IV) Z jest zbiorem domkniętym w R^{2n}.

Tak zdefiniowana przestrzeń produkcyjna Z jest stożkiem domkniętym zawartym w R_+^{2n} , z wierzchołkiem w 0. Dalej interesują nas wyłącznie nietrywialnie procesy produkcji $(x,y) \neq 0$.[3] Liczbę

$$\alpha(x, y) = \max \{\alpha | \alpha x \leqq y\}$$

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu (x,y). Funkcja α jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia 0 na $Z \setminus \{0\}$:

$$\forall (x, y) \in Z \setminus \{0\} \quad \forall \lambda > 0 \ \left(\alpha(\lambda x, \lambda y) = \alpha(x, y) \right).$$

Przy przyjętych założeniach istnieje

$$\alpha_M = \max_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \max_{(x,y) \in V(1)} \alpha(x, y) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}),$$

gdzie $V(1) = \{(x, y) \in Z \mid \|x\| = 1\}$ (tutaj i dalej $\|a\| = \sum_i |a_i|$).[4]

Liczbę α_M nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w gospodarce Gale'a. Proces $(\bar{x}, \bar{y})$, dla którego $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M$, nazywamy optymalnym procesem produkcji.

Przy przyjętych założeniach proces taki istnieje i jest określony z dokładnością do struktury (do mnożenia przez stałą dodatnią). Dalej interesują nas wyłącznie takie optymalne procesy produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, w których wytwarzane są wszystkie towary, czyli $\bar{y} > 0$. Gospodarkę mającą tę własność nazywamy regularną. Łatwo zauważyć, że w regularnej gospodarce Gale'a istnieje optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y})$, w którym

$$\alpha_M \bar{x} = \bar{y} > 0. \tag{1}$$

[3] Przy założeniu (II) warunek $(x,y) \neq 0$ pociąga za sobą $x \neq 0$.

[4] Zob. np. Panek (2003, tw. 5.2; zamiast zwartego zbioru $V(1)$ w twierdzeniu tym mamy zwarty zbiór Ω).

Pisząc dalej o optymalnym procesie produkcji w (regularnej) gospodarce zawsze mamy na myśli proces $(\bar{x}, \bar{y})$ spełniający warunek (1). Niech $p = (p_1, \ldots, p_n) \geq 0$ będzie wektorem cen towarów. Liczbę

$$\beta(x, y, p) = \frac{\langle p, y \rangle}{\langle p, x \rangle}$$

(tam gdzie jest określona) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu (x, y) przy cenach p (tutaj i wszędzie dalej $\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i$).

W regularnej gospodarce Gale’a istnieją takie ceny $\bar{p} \geq 0$, przy których

$$\forall (x, y) \in Z \left(\langle \bar{p}, y \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle \right) \tag{2}$$

oraz

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \max_{(x, y) \in Z \setminus \{0\}} \beta(x, y, \bar{p}) = \alpha_M > 0, \tag{3}$$

zob. np. Panek (2003; tw. 5.3, 5.4). Wektor $\bar{p}$ nazywamy wektorem cen von Neumanna. Trójka $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}) \in Z, \bar{p}\}$ tworzy tzw. optymalny stan równowagi von Neumanna w gospodarce Gale’a. W równowadze takiej dochodzi do zrównania efektywności ekonomicznej produkcji w gospodarce Gale’a z jej efektywnością technologiczną.[5]

Weźmy optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$. Zgodnie z (1) mamy:

$$\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \frac{\alpha_M \bar{x}}{\|\alpha_M \bar{x}\|} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \bar{s} > 0. \tag{4}$$

O wektorze $\bar{s}$ mówimy, że charakteryzuje optymalną strukturę nakładów $\left(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right)$ oraz produkcji $\left(\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} \right)$. Interesuje nas taka gospodarka Gale’a, w której efektywność ekonomiczna jakiegokolwiek procesu (x, y) ze strukturą nakładów odbiegającą od optymalnej, jest niższa od maksymalnej efektywności, osiąganej przez gospodarkę w równowadze:

[5] Jest to jednocześnie najwyższa efektywność jaką w ogóle może osiągnąć gospodarka.

(V) $\quad \forall (x,y) \in Z \; \left(\dfrac{x}{\|x\|} \neq \bar{s} \Rightarrow \beta(x,y,\bar{p}) < \beta(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) = \alpha_M \right).$

Weźmy liczbę $\varepsilon > 0$ i utwórzmy zbiór

$$Z(\varepsilon) = \left\{ (x,y) \in Z \mid \left\| \frac{x}{\|x\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \right\}. \tag{5}$$

Przy założeniach **(I)** – **(V)** funkcja $\beta(\cdot,\cdot,\bar{p})$ jest ciągła na $Z(\varepsilon)$ oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \max_{(x,y)\in Z(\varepsilon)} \beta(x,y,\bar{p}) = b(\varepsilon) < \alpha_M \tag{6}$$

lub inaczej, podstawiając $\delta(\varepsilon) = \alpha_M - b(\varepsilon)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall (x,y) \in Z(\varepsilon) \left(\beta(x,y,\bar{p}) \leq \alpha_M - \delta(\varepsilon) \right), \tag{7}$$

zob. Panek (2003, lemat 5.2). Z definicji funkcji b wnioskujemy, że jest ona dodatnia i nierosnąca na obszarze określoności:

$$\varepsilon' > \varepsilon \Rightarrow b(\varepsilon') \leq b(\varepsilon) \text{ oraz } b(\varepsilon) \to \alpha_M \text{ przy } \varepsilon \to 0$$

(tym samym $\alpha_M > \delta(\varepsilon) \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$). Żądamy nieco więcej, a mianowicie, że

(VI) Efektywność ekonomiczna procesu $(x,y) \in Z$ jest tym niższa, im bardziej struktura nakładów $\dfrac{x}{\|x\|}$ odbiega w nim od optymalnej struktury $\bar{s}$.

Wówczas funkcja $b(\varepsilon)$ w (6) maleje (równoważnie: funkcja $\delta(\varepsilon) = \alpha_M - b(\varepsilon)$ rośnie) na obszarze określoności. Warunek ten zachodzi np. gdy przestrzeń produkcyjna Gale'a jest stożkiem silnie wypukłym[6].

---

[6] Dla dowolnych dodatnich liczb α, β oraz dowolnej pary liniowo niezależnych procesów $(x^1,y^1) \in Z, (x^2,y^2) \in Z$ ich kombinacja liniowa $(x,y) = \alpha(x^1,y^1) + \beta(x^2,y^2)$ jest punktem wewnętrznym zbioru Z.

3. DYNAMIKA. ZAGADNIENIE WZROSTU DOCELOWEGO

Oznaczmy przez t zmienną czasu, $t = 0,1,\ldots,t_1 < +\infty$. Zbiór okresów $T = \{0,1,\ldots,t_1\}$ jest horyzontem, w którym interesuje nas funkcjonowanie gospodarki. Okres końcowy t_1 horyzontu T wyznacza jednocześnie jego długość. Przez

$$(x(t), y(t)) = (x_1(t),..., x_n(t), (y_1(t),..., y_n(t)) \in Z \tag{8}$$

oznaczamy dopuszczalny proces produkcji w gospodarce Gale’a w okresie t. Gospodarka jest zamknięta w tym sensie, że nakłady w okresie następnym pochodzą w niej wyłącznie z produkcji wytworzonej w okresie poprzednim:

$$x(t+1) \leqq y(t), \quad t = 0,1,\ldots,t_1 - 1. \tag{9}$$

Nierówność ta, łącznie z inkluzją (8) i warunkiem **(III)** prowadzi do inkluzji

$$(y(t), y(t+1)) \in Z, \quad t = 0,1,\ldots,t_1 - 1. \tag{10}$$

Ustalmy początkowy wektor produkcji

$$y(0) = y^0 > 0. \tag{11}$$

O ciągu wektorów $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniających warunki (10) – (11) mówimy, że opisuje $(y^0, t_1, \overline{p})$ – dopuszczalny proces wzrostu w gospodarce Gale’a. Dopuszczalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ prowadzący do maksymalnej wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna $\overline{p}$) w końcowym okresie t_1 horyzontu T nazywamy procesem $(y^0, t_1, \overline{p})$ – optymalnym. Jest on rozwiązaniem następującego zadania wzrostu docelowego:

$$\begin{gathered} \max\langle \overline{p}, y(t_1)\rangle \\ \text{p.w.}(10) - (11). \end{gathered} \tag{12}$$

Szczególny rodzaj procesów wzrostu stanowią tzw. procesy stacjonarne (z tempem $\gamma > 0$) postaci:

$$y(t) = \gamma^t y^0, \; y^0 \neq 0. \tag{13}$$

Z własności **(I)** przestrzeni produkcyjnej Gale’a wynika, że stacjonarny proces wzrostu z tempem $\gamma > 0$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy ma miejsce inkluzja

$$(y^0, \gamma y^0) \in Z,$$

co (dla pewnych wektorów y^0) zachodzi o ile tylko w procesie takim tempo $\gamma \le \alpha_M$. Co więcej, istnieje stacjonarny proces wzrostu $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ z tempem $\gamma = \alpha_M$ i początkowym wektorem produkcji $\bar{y}(0) = \bar{y} > 0$ postaci:

$$\bar{y}(t) = \alpha_M^t \bar{y}, \tag{14}$$

gdzie $\bar{y}$ jest wektorem produkcji w optymalnym procesie $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ spełniającym warunek (1); zob. Panek (2003, tw. 5.6). Optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ jest określony z dokładnością do struktury, i własność tę ma także stacjonarny proces wzrostu (14). Nazywamy go optymalnym, stacjonarnym procesem wzrostu w gospodarce Gale'a. Proces taki charakteryzuje się, w szczególności, stałą w czasie (optymalną) strukturą produkcji:

$$\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \frac{\alpha_M^t \bar{y}}{\|\alpha_M^t \bar{y}\|} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \bar{s}$$

(zob. (4)). O półprostej

$$N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$$

mówimy, że wyznacza magistralę produkcyjną (tzw. promień von Neumanna) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a.

4. „SŁABE", „SILNE" I „BARDZO SILNE" TWIERDZENIE O MAGISTRALI

Standardowe „słabe" twierdzenie o magistrali w gospodarce Gale'a brzmi następująco:

□ **Twierdzenie 1.** Jeżeli spełnione są warunki **(I) – (V)**, wówczas $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε, że liczba okresów czasu, w których $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek

$$\left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| \ge \varepsilon \tag{15}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T (tj. nie zależy od t_1).

Z dowodem można zapoznać się np. w pracy Panek (2003, tw. 5.8).

■

Twierdzenie głosi, że struktura produkcji w optymalnym procesie wzrostu różni się „dowolnie mało” od struktury produkcji na magistrali, na której gospodarka rozwija się w maksymalnym tempie α_M[7]. Im dłuższy jest horyzont $T = \{0,1,\ldots,t_1\}$, tym dłużej gospodarka pozostaje w bliskim otoczeniu magistrali (w sensie odległości kątowej (15)).

Wprawdzie twierdzenie 1 mówi o zbliżaniu się optymalnego procesu wzrostu do magistrali, jednak nie opisuje sposobu w jaki to zbliżenie następuje. Precyzują to dwa kolejne twierdzenia. Zaczniemy od „bardzo silnego” twierdzenia wyjaśniającego co się dzieje z optymalnym procesem, który w pewnym okresie $\breve{t} < t_1$ dociera do magistrali.

□ **Twierdzenie 2.** Jeżeli spełnione są warunki **(I) – (V)** i $(y^0, t_1, \overline{p})$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie $\breve{t} < t_1$ spełnia warunek $y^*(\breve{t}) \in N$, to

$$\forall t \in \{\breve{t}+1,\ldots,t_1-1\} \left(\; y^*(t) \in N \; \right).$$

Podobne twierdzenie zostało udowodnione we wspomnianej we Wstępie pracy Panek, Runka (2011), w której jednak inaczej niż obecnie zdefiniowany był optymalny proces wzrostu. Poniżej przytaczamy dowód w przypadku gdy $(y^0, t_1, \overline{p})$ optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest rozwiązaniem zadania (12).

Dowód twierdzenia 2. Inkluzja $y^*(\breve{t}) \in N$ jest równoważna z warunkiem

$$\frac{y^*(\breve{t})}{\|y^*(\breve{t})\|} = \bar{s},$$

zatem $y^*(\breve{t}) = \sigma\,\bar{s}$, gdzie $\sigma = \left\| y^*(\breve{t}) \right\| > 0$. Utwórzmy proces $\{y'(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci:

$$y'(t) = \begin{cases} y^*(t), & dla \quad t = 0,1,\ldots,\breve{t}, \\ \alpha_M^{t-\breve{t}}\sigma\bar{s}, & dla \quad t = \breve{t}+1,\ldots,t_1, \end{cases} \tag{16}$$

otrzymany ze „sklejenia” początkowego fragmentu $(y^0, t_1, \overline{p})$ – optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ oraz końcowej części stacjonarnego procesu $\{\overline{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (14) z początkowym wektorem $\bar{y} = \alpha_M^{-\breve{t}}\sigma\bar{s} \in N$. Proces wzrostu (16) jest (y^0, t_1) – dopuszczalny, zatem z definicji $(y^0, t_1, \overline{p})$ – optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ mamy:

[7] Ponieważ na magistrali osiągana jest najwyższe tempo wzrostu produkcji, bywa ona czasami nazywana drogą najszybszego ruchu gospodarki.

$$\langle \overline{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \overline{p}, y'(t_1) \rangle = \alpha_M^{t_1 - \breve{t}} \sigma \langle \overline{p}, \overline{s} \rangle > 0. \tag{17}$$

Z drugiej strony, zgodnie z (2), (10):

$$\langle \overline{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M \langle \overline{p}, y^*(t_1 - 1) \rangle \leq \ldots \leq \alpha_M^{t_1 - \breve{t}} \langle \overline{p}, y^*(\breve{t}) \rangle = \alpha_M^{t_1 - \breve{t}} \sigma \langle \overline{p}, \overline{s} \rangle. \tag{18}$$

Załóżmy, że

$$\exists \tau \in \{\breve{t} + 1, \ldots, t_1 - 1\} \left(\frac{y^*(\tau)}{\|y^*(\tau)\|} \neq \overline{s} \right),$$

czyli

$$\left\| \frac{y^*(\tau)}{\|y^*(\tau)\|} - \overline{s} \right\| = \varepsilon > 0.$$

Wówczas, zgodnie z (7),

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \ \left(\beta(y^*(\tau), y^*(\tau + 1), \overline{p}) = \frac{\langle \overline{p}, y^*(\tau + 1) \rangle}{\langle \overline{p}, y^*(\tau) \rangle} \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon \right)$$

lub inaczej

$$\langle \overline{p}, y^*(\tau + 1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \overline{p}, y^*(\tau) \rangle. \tag{19}$$

Łącząc (18), (19) otrzymujemy

$$\langle \overline{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \ \alpha_M^{t_1 - \breve{t} - 1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \ \sigma \langle \overline{p}, \overline{s} \rangle, \tag{20}$$

a stąd i z (17)

$$0 < \alpha_M^{t_1 - \breve{t}} \sigma \langle \overline{p}, \overline{s} \rangle \leq \alpha_M^{t_1 - \breve{t} - 1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \ \sigma \langle \overline{p}, \overline{s} \rangle.$$

Nierówność ta jest prawdziwa tylko gdy $\delta_\varepsilon \leq 0$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód twierdzenia 3.

■

Przy dowodzie „silnego” twierdzenia o magistrali potrzebna nam będzie (wynikająca z ciągłości funkcji α) własność dopuszczalnych procesów produkcji głosząca, że jeżeli tylko struktura nakładów $\frac{x}{\|x\|}$ w procesie $(x, y) \in Z$ jest dostatecznie „bliska” struktury magistralnej $\bar{s}$, to z nakładów tych możliwe jest wytworzenie produkcji $y \in N$ z technologiczną efektywnością dowolnie bliską optymalnej efektywności α_M. Mówi o tym następujący lemat.

□ **Lemat 1**

$$\forall \delta \in (0,1)\ \exists \varepsilon' > 0\Big(s \in S_{++}(1)\ \&\ \|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \Rightarrow (s, (1-\delta)\alpha_M \bar{s}) \in V(1)\ \&$$

$$\&\ \alpha(s, (1-\delta)\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta\Big),$$

gdzie: $S_{++}(1) = \{x > 0 \mid \|x\| = 1\}$ oraz (przypominamy) $V(1) = \{(x, y) \in Z \mid \|x\| = 1\}$.

Dowód. Najpierw pokażemy, że

$$\forall s \in S_{++}(1)\ \exists \sigma \in (0,1)\big((s, \sigma\alpha_M \bar{s}) \in V(1)\big).$$

Ponieważ $\bar{s} > 0$, więc $\forall s \in S_{++}(1)\ \exists\ \lambda(s) = \min\{\lambda \mid \lambda s \geqq \bar{s}\}$. Oczywiście, $\lambda(s) \geq 1$. Z własności procesu optymalnego (zob. (1), (4)) wynika, że $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) \in V(1) \subset Z$. Wtedy, zważywszy na własność **(III)** przestrzeni produkcyjnej Z, otrzymujemy:

$$(\lambda(s)s,\ \alpha_M \bar{s}) \in Z \text{ czyli } \big(s, \sigma(s)\alpha_M \bar{s}\big) \in V(1),$$

gdzie $\sigma(s) = \dfrac{1}{\lambda(s)}$ jest ciągłą funkcją. Weźmy dowolny ciąg $\{s^i\}_{i=1}^{\infty}$ elementów z $S_{++}(1)$ zbieżny do $\bar{s}$. Wtedy $\sigma(s^i) \underset{i}{\rightarrow} \sigma(\bar{s}) = 1$ i ponieważ σ jest funkcją ciągłą w otoczeniu $\bar{s}$, więc

$$\forall \delta > 0\ \ \exists \varepsilon_1 > 0\big(\|s - \bar{s}\| < \varepsilon_1 \Rightarrow \sigma(s) \geq 1 - \delta\big).$$

Stąd i z warunku **(III)** wynika, że $(s, (1-\delta)\alpha_M \bar{s}) \in V(1)$.

Funkcja α jest ciągła na $V(1)$ oraz

$$\max_{(x,y)\in V(1)} \alpha(x, y) = \alpha_M = \alpha(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}),$$

więc

$$\forall \delta > 0\ \ \exists \varepsilon_2 > 0\ \ \big(\|s - \bar{s}\| < \varepsilon_2 \Rightarrow \alpha(s, \sigma(s)\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta\ .$$

Tezę lematu otrzymujemy przyjmując $\varepsilon' = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

■

W prezentowanym dalej „silnym” twierdzeniu o magistrali dowodzimy, że wytrącenie optymalnego procesu wzrostu z otoczenia magistrali, o którym mowa w twierdzeniu 2, może mieć miejsce co najwyżej na początku i pod koniec horyzontu T. Im dłuższy jest horyzont gospodarki, tym dłużej, w środkowej fazie, optymalny proces wzrostu przebiega w bliskim otoczeniu magistrali (tym bliżej im dłuższy jest horyzont T). Istotną rolę gra warunek **(VI)**.

□ **Twierdzenie 3.** Weźmy $(y^0, t_1, \overline{p})$ – optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Jeżeli spełnione są warunki **(I)** – **(VI),** to

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k \in N \quad \forall t_1 > 2k \;\; \forall t \in \{k, k+1, \ldots, t_1 - k\} \left(\left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \overline{s} \right\| < \varepsilon \right).$$

Dowód. Wybierzmy liczbę $\varepsilon > 0$. Niech liczba $\delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M)$ spełnia warunek (7). Weźmy $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$ oraz odpowiadającą jej liczbę $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ z lematu. Zgodnie ze „słabym” twierdzeniem o magistrali istnieje taka liczba naturalna k_ε, że jeżeli $t_1 > k_\varepsilon$, to

$$\left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \overline{s} \right\| < \varepsilon' \tag{21}$$

dla co najmniej jednego $t \in T = \{0, 1, \ldots, t_1\}$. Niech $t_1 > 2k_\varepsilon'$ oraz τ_1 będzie pierwszym, a τ_2 ostatnim okresem horyzontu $T = \{0, 1, \ldots, t_1\}$, w którym zachodzi warunek (21). W świetle lematu

$$\left(\frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|}, (1-\delta)\alpha_M \overline{s} \right) \in V(1) \,,$$

czyli

$$\left(y^*(\tau_1), \sigma(1-\delta)\alpha_M \overline{s} \right) \in Z \,,$$

gdzie $\sigma = \|y^*(\tau_1)\| > 0$. Wówczas proces

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & dla\ t = 0,1,\ldots,\tau_1, \\ \sigma(1-\delta)\alpha_M^{t-\tau_1}\overline{s}, & dla\ t = \tau_1 + 1,\ldots,t_1 \end{cases}$$

jest (y^0, t_1) – dopuszczalny oraz z definicji optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1)\rangle = \sigma(1-\delta)\alpha_M^{t-\tau_1}\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle. \tag{22}$$

Niech k' będzie liczbą okresów między τ_1, τ_2, w których

$$\left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon .$$

Z (2), (7), (10) otrzymujemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \leq (\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1-\tau_2}\, \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'}\, (\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'}\, \langle \bar{p}, y^*(\tau_1)\rangle . \tag{23}$$

Łącząc (22), (23) dochodzimy do nierówności

$$\sigma(1-\delta)\alpha_M^{t_1-\tau_1}\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle \leq (\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1-\tau_2}\, \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'}\, (\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'}\, \langle \bar{p}, y^*(\tau_1)\rangle ,$$

lub inaczej:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1-\tau_2} \frac{\sigma(1-\delta)\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle}{\langle \bar{p}, y^*(\tau_1)\rangle}.$$

Nierówność powyższą, po podstawieniu $s^*(\tau_1) = \dfrac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|}$, można zapisać w równoważnej postaci:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1-\tau_2} \frac{(1-\delta)\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle}{\langle \bar{p}, s^*(\tau_1)\rangle}. \tag{24}$$

Zgodnie z lematem:

$$\alpha = \alpha(s^*(\tau_1), (1-\delta)\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta ,$$

zatem $\alpha s^*(\tau_1) \leq (1-\delta)\alpha_M \bar{s}$ oraz $(\alpha_M - \delta)\, s^*(\tau_1) \leq (1-\delta)\alpha_M \bar{s}$. Wówczas:

$$(\alpha_M - \delta)\, \langle \bar{p}, s^*(\tau_1)\rangle \leq (1-\delta)\alpha_M \langle \bar{p}, \bar{s}\rangle ,$$

czyli

$$\frac{(1-\delta)\langle \bar{p},\bar{s}\rangle}{\langle \bar{p},s^*(\tau_1)\rangle} \geq \frac{\alpha_M-\delta}{\alpha_M}.$$

Stąd i z (24) dostajemy:

$$\left(\frac{\alpha_M-\delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M-\delta(\varepsilon')}\right)^{t_1-\tau_2} \frac{\alpha_M-\delta}{\alpha_M}.$$

Pamiętając, że $0 < \delta(\varepsilon') < \delta(\varepsilon) < \alpha_M$ (gdyż $0' < \varepsilon' < \varepsilon$ i funkcja $\delta(\varepsilon)$ jest rosnąca; zob. warunek **(VI)**) oraz $\delta \in (0,\delta(\varepsilon))$ i $t_1 - \tau_2 \geq 0$, dochodzimy do nierówności:

$$\left(\frac{\alpha_M-\delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} > \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M-\delta(\varepsilon')}\right)^{t_1-\tau_2} \frac{\alpha_M-\delta(\varepsilon)}{\alpha_M},$$

czyli $\left(\frac{\alpha_M-\delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'-1} > 1$ lub (równoważnie) $(\alpha_M-\delta(\varepsilon))^{k'-1} > \alpha_M^{k'-1}$.

Jedyną nieujemną liczbą całkowitą spełniającą ten warunek jest $k' = 0$. W charakterze liczby k, o której mowa w tezie twierdzenia, można przyjąć $k = k_{\varepsilon'}$.

■

Nierówność (23) sugeruje możliwość występowania innych cech charakterystycznych procesów optymalnych w otoczeniu magistrali, zwłaszcza po osłabieniu lub zmodyfikowaniu warunku **(VI)**. Interesująca wydaje się także odpowiedź na pytanie czy własności podobne do udowodnionych w twierdzeniu 4 będą wykazywać także optymalne procesy wzrostu po zastąpieniu kryterium (12) na przykład kryterium maksymalizacji wartości produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T (a nie tylko w jego końcowym okresie t_1).

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

[1] Khan M. A. and Piazza A., (2011), An Overview of Turnpike Theory: Towards the Discounted Deterministic Case, *Adv. Math. Econ*., 14, 39–68.
[2] Makarow W. L., Rubinow A. M., (1973), *Matiematiczeskaja tieoria ekonomiczeskoj dynamiki i rawnowiesija*, Nauka, Moskwa.
[3] McKenzie L. W., (1976), Turnpike theory, *Econometrica*, 841–866.
[4] McKenzie L. W., (2005), Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics, w: Arrow K. J., Intriligator M. D., (red.), *Handbook of Mathematical Economics*, edition 2, vol. III, chapter 26, 1281–1355.
[5] Nikaido H., (1968), *Convex Structures and Economic Theory*, Acad. Press, New York
[6] Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AE w Poznaniu.
[7] Panek E., (2011), O pewnej wersji „słabego" twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, *Przegląd Statystyczny*, 58, 1–2, 75–87.
[8] Panek E., Runka H. J., (2011), Efekt magistrali w gospodarce Gale'a. Wersja szczególna, w: Panek E., (red.), *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii. Modelowanie zjawisk gospodarczych. Elementy teorii*, Wydawnictwo UEP, Poznań, 220–231.
[9] Takayama A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

„SILNY" EFEKT MAGISTRALI W MODELU DYNAMIKI EKONOMICZNEJ TYPU GALE'A. ZAGADNIENIE WZROSTU DOCELOWEGO

S t r e s z c z e n i e

Nawiązując do prac Panek (2003, rozdz. 5) oraz Panek, Runka (2011) udowodniono tzw. „silny" efekt magistrali w modelu dynamiki ekonomicznej typu Gale'a przy założeniu, że efektywność procesów produkcji w gospodarce jest tym niższa im bardziej struktura nakładów w takich procesach odbiega od optymalnej.

Słowa kluczowe: model Gale'a, równowaga von Neumanna, „słabe", „silne" i „bardzo silne" twierdzenie o magistrali

„STRONG" TURNPIKE EFFECT IN THE GALE ECONOMIC DYNAMICS MODEL. FINITE STATE GROWTH PROBLEM

A b s t r a c t

This paper, in reference to articles Panek (2003) chapt. 5 and Panek, Runka (2011) presents proof of the "strong" turnpike effect in the Gale – type economic dynamic model, assuming that the production processes efficiency in the economy is the lower the more the investment structure in such processes differs from the optimum.

Keywords: Gale model, von Neumann equilibrium, „weak", „strong" and „very strong" turnpike theorem