

PIOTR KĘBŁOWSKI

## WNIOSKOWANIE O RZĘDZIE KOINTEGRACJI DLA MODELU VEC ZE SKŁADNIKIEM LOSOWYM Z ROZKŁADU $S_U$ JOHNSONA<sup>1</sup>

### 1. WPROWADZENIE

Wnioskowanie o rzędzie kointegracji za pomocą statystyki opartej na regule ilorazu wiarygodności przeprowadzane jest najczęściej przy założeniu, że składnik losowy jest generowany przez wielowymiarowy proces gaussowskiego białego szumu. Weryfikacja tego założenia w praktyce modelowania szeregów zintegrowanych wymusza zwykle uwzględnienie w modelu VAR wielu zmiennych sztucznych dla odpowiednich obserwacji nietypowych. Jednak konsekwencją włączenia do modelu zmiennych sztucznych i pominięcia informacji związanej z obserwacjami zakwalifikowanymi jako nietypowe jest spadek mocy testu, co w małych próbach może nazbyt często prowadzić do uzyskania wskazań testu, które nie odpowiadają procesowi generującemu system. Interesujące jest zatem rozważenie możliwości wnioskowania o rzędzie kointegracji przed ewentualnym uwzględnieniem w modelu zmiennych sztucznych i zbadanie właściwości rozważanych testów małopróbkowych rzędu kointegracji, gdy składnik losowy jest generowany przez rozkład skośny, leptalbo platykurtyczny.

Statystyka ilorazu wiarygodności, jak również estymator parametrów strukturalnych, wyprowadzone są przy założeniu, że składnik losowy generowany jest przez wielowymiarowy proces gaussowskiego białego szumu –  $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N_p(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega})$ . Jednakże ich rozkłady asymptotyczne zostały wywiedzione dla bardziej ogólnego założenia, że  $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim IID(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega})$  (zob. Johansen, 1996, s. 141). Stąd uchylenie założenia  $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N_p(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega})$  nie zaburza asymptotycznych właściwości testów, gdy  $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim IID(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega})$ , choć może prowadzić do zmiany małopróbkowych właściwości statystyk oraz estymatorów parametrów (por. np. Gonzalo, 1994). Toda (1994, 1995) formułuje przypuszczenie, że małopróbkowe właściwości testu  $LR$  rzędu kointegracji ulegną pogorszeniu,

---

<sup>1</sup> Artykuł przedstawia wybrane wyniki z rozprawy doktorskiej autora pt. „Małopróbkowe wnioskowanie o rzędzie kointegracji”, obronionej w 2009 roku na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym Uniwersytetu Łódzkiego. Praca naukowa finansowana ze środków MNiSW jako projekt badawczy nr N111 019 31/2139 pt.: „Małopróbkowe wnioskowanie o rzędzie kointegracji”. Autor pragnie podziękować Recenzentom za wniesione uwagi.

gdy składnik losowy procesu generującego dane nie będzie pochodził z rozkładu normalnego.

W artykule przedstawione zostaną wyniki analiz Monte Carlo własności testów rzędu kointegracji, gdy składnik losowy nie jest generowany przez proces białoszumowy, lecz pochodzi z rozkładu skośnego, lepto- albo platykurtycznego, należącego do rodziny rozkładów  $S_U$  zaproponowanej przez Johnsona (1949). Skośność oraz leptokurtyczność rozkładu reszt są typowymi cechami modelu VAR na przykład w przypadku modelowania zmiennych z rynków finansowych. Uwzględnienie tych cech *explicite* prowadzi do hybrydowych modeli VEC, w których reszty generowane są za pomocą procesu SV lub zawierają efekt ARCH (zob. Pajor, 2006). W części 2. omówiono sposób generowania zmiennej z rozkładu  $S_U$  oraz, na przykładzie, przedstawiono użyteczność tego rozkładu do opisu niegaussowskiego rozkładu reszt. Część 3. przedstawia wyniki analiz Monte Carlo własności małopróbkowych testów rzędu kointegracji. Część 4. zawiera wnioski podsumowujące badanie.

## 2. ROZKŁAD $S_U$ A ROZKŁAD EMPIRYCZNY RESZT

Analizę Monte Carlo małopróbkowych własności testów rzędu kointegracji, gdy składnik losowy jest generowany przez rozkład skośny, lepto- albo platykurtyczny przeprowadzono za pomocą rozkładu  $S_U$  zaproponowanego przez Johnsona (1949). Rozkład ten posiada cztery niezależne momenty, jest określony na dziedzinie liczb rzeczywistych, zmienna z tego rozkładu powstaje w wyniku przekształcenia zmiennej z rozkładu normalnego.

Zmienne z rodziny rozkładów zaproponowanych przez Johnsona (1949) otrzymywane są w wyniku zastosowania przekształcenia zaproponowanego przez Edgewortha (1898):

$$z_t = a_3 + a_4 f\left(\frac{x_t - a_1}{a_2}\right), \quad (1)$$

gdzie  $z_t$  jest zmienną pochodzącą ze standaryzowanego rozkładu normalnego,  $a_1$  i  $a_2$  to parametry odpowiednio wartości oczekiwanej i wariancji, parametry  $a_3$  i  $a_4$  określają, skośność i kurtozę zmiennej  $x_t$ , przy założeniu symetryczności funkcji transformacji (zob. Johnson, 1949),  $x_t$  jest zmienną pochodzącą z rozkładu konstruowanego, a  $f(\cdot)$  oznacza funkcję, zależną od określonej liczby parametrów. Zmienna z rozkładu  $S_U$ , oznaczona symbolem  $x_t$ , definiowana jest za pomocą następującego przekształcenia:

$$z_t = a_3 + a_4 \sinh^{-1}\left(\frac{x_t - a_1}{a_2}\right) = a_3 + a_4 \log\left(\left(\frac{x_t - a_1}{a_2}\right) + \left(\left(\frac{x_t - a_1}{a_2}\right)^2 + 1\right)^{1/2}\right), \quad (2)$$

skąd wynika, że:

$$x_t = a_1 + \frac{a_2}{2} \left( e^{(z_t - a_3)/a_4} - e^{-(z_t - a_3)/a_4} \right) = a_1 + \frac{a_2}{2} \sinh \left( \frac{z_t - a_3}{a_4} \right). \quad (3)$$

Zmienna z rozkładu  $S_U$  posiada cztery niezależne momenty, które są określone jako (por. Johnson, 1949):

$$\mu_1' = -c_1^{1/2} \sinh c_2, \quad (4)$$

$$\mu_2 = (c_1 - 1)(c_1 \cosh 2c_2 + 1)/2, \quad (5)$$

$$\mu_3 = -c_1^{1/2} (c_1 - 1)^2 (c_1 (c_1 + 2) \sinh 3c_2 + 3 \sinh c_2) / 4, \quad (6)$$

$$\mu_4 = (c_1 - 1)^2 (c_1^2 (c_1^4 + 2c_1^3 + 3c_1^2 - 3) \cosh 4c_2 + 4c_1^2 (c_1 + 2) \cosh 2c_2 + 3(2c_1 + 1)) / 8, \quad (7)$$

gdzie  $\mu_i$  oznacza moment centralny rzędu  $i$ ,  $\mu_i'$  to moment zwykły rzędu  $i$ ,  $c_1 = e^{a_2^2}$  oraz  $c_2 = a_3/a_4$ . Odpowiedni wybór parametrów  $a_1, \dots, a_4$  umożliwia zatem konstrukcję zmiennej z rozkładu  $S_U(\mu_1'; \mu_2; b_1^{1/2}; b_2)$  o zadanych czterech pierwszych momentach dla określonego obszaru w przestrzeni, wyznaczonej przez kwadrat trzeciego momentu standaryzowanego ( $b_1^{1/2}$ ) i czwarty moment standaryzowany ( $b_2$ ), ograniczonego linią  $b_2 - b_1 - 1 = 0$  dla rozkładów otrzymywanych w wyniku przekształcenia logarytmiczno-normalnego (por. Johnson, 1949).

Rysunek A1 (zob. aneks) stanowi przykład histogramu standaryzowanych reszt równania w modelu VECM bez zmiennych sztucznych, dla którego jednowymiarowe testy normalności odrzucają hipotezę, że reszty te mogą być realizacjami procesu gaussowskiego białego szumu. Graniczny poziom istotności jest bliski zera, co wynika z faktu, że rozkład reszt jest leptokurtyczny i lewostronnie skośny. W tle rysunku A1 pokazano histogram standaryzowanego rozkładu normalnego. Z kolei rysunek A2 zestawia histogramy rozkładu  $S_U$  oraz normalnego.

### 3. WŁAŚCIWOŚCI METOD WNIOSKOWANIA MAŁOPRÓBKOWEGO DLA SKŁADNIKA LOSOWEGO Z ROZKŁADU $S_U$

Porównanie właściwości testów przeprowadzono dla składnika losowego pochodzącego z rozkładu  $S_U(0;1;-0,75;6)$ , gdzie  $a_1=0,5617$ ,  $a_2=1,4025$ ,  $a_3=0,5923$  i  $a_4=1,7682$ , oraz składnika losowego generowanego przez proces gaussowskiego białego szumu. Badanie zniekształcenia rozmiaru testów wykonano dla systemu zawierającego pięć zmiennych będących realizacją procesu zintegrowanego w stopniu pierwszym oraz cztery wspólne trendy stochastyczne. Założono, że wartość oczekiwana zmiennych może być niezerowa i nie występuje trend liniowy w poziomie zmiennych, zatem jedynym składnikiem deterministycznym jest stała ograniczona do przestrzeni kointegrującej wektorowego modelu korekty błędem (VEC), postaci:

$$\Delta \mathbf{y}_t = (\mathbf{y}_{t-1} \mathbf{B} + \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{A}^T + \Delta \mathbf{y}_{t-1} \boldsymbol{\Gamma}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (8)$$

gdzie  $\mathbf{y}_t = [y_{1t} \ y_{2t} \ \dots \ y_{Pt}]$ ,  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  są macierzami parametrów o wymiarach  $P \times R$  i pełnego rzędu,  $\boldsymbol{\Gamma}_1$  jest macierzą parametrów o wymiarach  $P \times P$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$  jest  $R$ -elementowym wektorem parametrów, a  $R$  oznacza rząd kointegracji.

Porównanie rozmiaru empirycznego i mocy przeprowadzono dla siedmiu testów: (i) standardowego testu ilorazu wiarygodności –  $LR$  (Johansen, 1988), (ii) testu  $LR$  z poprawką Bartletta –  $LR^{BC}$  (Johansen, 2002), (iii) testu  $LR$  z poprawką Reinsela i Ahna –  $LR^{RA}$  (Reinsel, Ahn, 1989, 1992; Reimers, 1992), (iv) testu  $LR$  z poprawką Cheunga i Laia –  $LR^{CL}$  (Cheung, Lai, 1993), (v) testu  $LR$  z poprawką Hansena i Rahbeka –  $LR^{HR}$  (Hansen, Rahbek 2002), (vi) bootstrapowego testu  $LR$  –  $LR^B$  (Swensen, 2006), (vii) bootstrapowego testu  $LR$  z poprawką Bartletta –  $LR^{BCB}$  (Kęblowski, 2009, 2013). W każdym eksperymencie wyznaczano 10 tys. replikacji. Dla przyjętego rozmiaru nominalnego testu 5%, odchylenie standardowe rozmiaru wynosi wówczas 0,0022 (zob. szerszy opis testów i eksperymentów Monte Carlo w: Kęblowski, 2013).

Eksperymenty zakodowane zostały w języku programowania RATS 6.3 (kod źródłowy w: Kęblowski, 2009). Obliczenia przeprowadzono na komputerze klasy Intel Core2 1,83GHz. Czas trwania pojedynczego eksperymentu Monte Carlo (tj. łącznie dla  $1,0e^4 \cdot 1,0e^3 = 1,0e^7$  replikacji) dla  $T = 50$  oraz  $T = 100$  wyniósł odpowiednio około 20 i 36 godzin.

Porównanie zniekształcenia rozmiaru małopróbkowych testów rzędu kointegracji przeprowadzono za pomocą procesu (8), gdzie wartości startowe pochodzą ze standaryzowanego rozkładu normalnego, a pierwsze sto obserwacji jest odrzucanych. Parametry procesu generującego dane (DGP) w wersji bazowej ( $P = 5$ ,  $R = 1$ ) określono jako:  $\mathbf{B} = [1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{A} = [\alpha \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\boldsymbol{\varphi} = 1$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}_1 = \zeta \mathbf{I}$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N_p(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega})$  i  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{I}$ . Przyjęto długość próby  $T = 50$ . Wyniki przedstawiono w tabelach 1. i 2. dla: szybkości mechanizmu korekty błędem (parametr  $\alpha$ , wyniki w wierszach) oraz siły efektów krótkookresowych (parametr  $\zeta$ , wyniki w kolumnach).

Tabela 1.

Empiryczny rozmiar (w %) testów małopróbkowych,  $P = 5$ ,  $R = 1$ ,  $T = 50$ , DGP (8),  
składnik losowy generowany przez rozkład  $S_U(0; 1; -0,75; 6)$

$\alpha \setminus \zeta$		0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
-0,1	<i>LR</i>	8,5	9,7	17,0	31,4	67,5	98,9
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	0,8	0,5	0,7	0,9	1,1	2,6
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	0,3	0,4	1,1	3,4	17,1	81,4
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	0,5	0,5	1,7	4,5	20,8	84,8
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	2,4	2,8	6,1	13,2	41,6	94,9
	<i>LR<sup>B</sup></i>	0,2	0,2	0,3	0,6	1,0	8,5
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	0,3	0,3	0,4	0,7	1,0	1,2
-0,2	<i>LR</i>	9,6	11,9	19,8	35,7	68,7	98,3
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	1,0	1,0	1,2	1,4	2,5	2,5
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	0,5	0,8	1,6	4,4	19,9	78,9
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	0,7	1,1	2,2	5,6	23,8	82,4
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	2,8	3,9	7,1	16,0	44,8	93,4
	<i>LR<sup>B</sup></i>	0,4	0,5	0,6	0,7	2,1	10,0
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	0,5	0,6	0,7	1,0	2,0	1,9
-0,4	<i>LR</i>	13,0	15,9	24,3	39,7	70,1	96,6
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	1,8	1,9	2,3	3,1	4,4	1,7
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	0,6	1,0	2,0	6,0	23,5	70,6
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	1,0	1,5	2,9	7,7	27,7	74,8
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	4,1	5,6	9,4	20,1	47,6	89,3
	<i>LR<sup>B</sup></i>	0,6	0,7	0,8	1,5	3,5	9,4
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	0,9	0,9	1,2	2,1	3,9	1,8
-0,6	<i>LR</i>	15,5	17,6	26,5	42,3	69,0	95,5
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	2,4	2,9	3,7	4,9	4,6	1,2
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	0,9	1,3	3,0	7,6	23,6	66,6
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	1,2	1,8	4,0	9,6	27,3	71,1
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	5,1	6,1	11,3	21,9	47,3	86,7
	<i>LR<sup>B</sup></i>	0,9	0,9	1,5	2,5	4,2	8,9
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	1,1	1,3	2,1	3,3	4,5	1,6

Tabela 1.

-0,8	<i>LR</i>	16,5	19,1	26,8	42,1	68,0	95,3
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	3,4	3,7	4,2	5,6	4,9	1,1
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	1,4	1,7	3,0	8,3	23,8	64,6
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	1,9	2,3	4,0	10,1	27,3	69,4
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	5,8	7,4	11,6	23,0	46,6	85,8
	<i>LR<sup>B</sup></i>	1,2	1,4	1,6	2,4	4,8	9,3
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	1,7	1,8	2,2	3,6	5,4	1,9
-0,9	<i>LR</i>	16,7	19,7	27,4	42,4	67,5	95,4
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	3,5	3,8	4,9	5,7	4,6	0,9
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	1,0	1,6	3,6	8,4	22,3	64,7
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	1,4	2,3	4,6	10,5	25,8	69,3
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	6,3	7,2	12,3	22,4	45,6	85,5
	<i>LR<sup>B</sup></i>	1,1	1,6	1,9	2,8	4,5	9,0
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	1,4	1,9	2,6	3,7	5,0	1,7

Tabela 2.

Empiryczny rozmiar (w %) testów małopróbkowych,  $P = 5$ ,  $R = 1$ ,  $T = 50$ , DGP (8),  
składnik losowy generowany przez proces gaussowski białego szumu

$\alpha \setminus \xi$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	
-0,1	<i>LR</i>	7,4	9,9	16,4	32,8	66,0	98,9
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	2,9
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	0,2	0,5	1,1	3,7	17,0	81,2
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	0,3	0,5	1,4	4,8	20,7	84,5
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	1,9	2,5	5,2	14,2	41,8	94,9
	<i>LR<sup>B</sup></i>	0,2	0,2	0,5	0,5	1,2	8,6
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	0,2	0,3	0,6	0,7	1,0	1,2
-0,2	<i>LR</i>	9,4	11,9	19,4	36,0	69,8	98,4
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	0,9	0,9	1,2	1,4	2,5	2,6
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	0,4	0,6	1,4	4,5	20,3	79,2
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	0,6	0,8	1,8	5,8	24,5	83,1
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	2,4	3,6	7,0	15,9	45,7	93,9
	<i>LR<sup>B</sup></i>	0,4	0,4	0,5	0,7	1,8	10,0
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	0,4	0,5	0,7	1,0	1,9	1,7

Tabela 2.

-0,4	<i>LR</i>	13,2	15,6	24,4	40,6	70,6	97,0
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	1,8	1,9	2,5	3,4	4,2	1,8
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	0,8	1,0	2,5	6,7	23,6	71,3
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	1,2	1,4	3,3	8,5	27,6	75,9
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	4,2	5,3	9,6	20,4	48,4	89,4
	<i>LR<sup>B</sup></i>	0,6	0,7	1,0	1,5	3,6	9,5
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	0,9	0,9	1,4	2,1	3,8	1,8
-0,6	<i>LR</i>	15,0	17,8	25,5	41,7	68,4	96,0
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	2,4	2,7	3,3	4,6	4,9	1,5
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	0,9	1,2	2,9	7,9	23,1	67,0
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	1,3	1,7	3,7	9,9	27,2	71,8
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	4,7	6,3	10,5	22,2	47,5	87,4
	<i>LR<sup>B</sup></i>	0,8	0,9	1,3	2,2	4,0	9,2
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	1,0	1,3	1,8	3,0	4,4	1,7
-0,8	<i>LR</i>	15,5	19,5	27,3	42,6	69,0	95,8
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	2,8	3,5	4,5	5,0	5,0	1,0
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	0,9	1,4	3,3	7,9	23,3	66,0
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	1,3	1,8	4,3	9,7	27,1	70,3
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	5,0	7,1	11,6	22,2	47,2	86,8
	<i>LR<sup>B</sup></i>	1,0	1,1	1,8	2,7	4,6	9,3
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	1,2	1,4	2,3	3,4	5,1	1,6
-0,9	<i>LR</i>	16,3	18,5	28,3	42,4	67,8	95,3
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	3,5	3,6	4,6	5,3	4,3	1,0
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	1,2	1,4	3,2	8,0	22,5	64,0
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	1,6	2,0	4,2	10,1	26,6	68,8
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	6,0	6,8	12,1	22,9	46,0	85,4
	<i>LR<sup>B</sup></i>	1,2	1,2	1,9	2,5	4,4	8,5
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	1,5	1,6	2,4	3,6	4,7	1,6

Wyniki eksperymentów Monte Carlo zestawione w tabeli 1 nie różnią się istotnie od wyników eksperymentów dla przypadku, gdy składnik losowy jest generowany przez proces gaussowskiego białego szumu (tabela 2). Zatem, w przypadku gdy składnik losowy pochodzi z rozkładu skośnego, leptokurtycznego, wówczas testy rzędu kointegracji oparte na regule ilorazu wiarygodności są odporne, ze względu

na rozmiar testu, na niespełnienie założenia, że składnik losowy pochodzi z rozkładu normalnego, dla rozważanych obszarów w przestrzeni parametrycznej (por. przeciwne przypuszczenie sformułowane przez Todę, 1994, 1995 oraz podobny wniosek dla testu asymptotycznego w: Cheung i Lai, 1993).

W przypadku gdy składnik losowy jest generowany przez rozkład skośny, leptokurtyczny (albo platykurtyczny), wówczas właściwa strategia małopróbkowego wnioskowania o rzędzie kointegracji polega na weryfikacji rzędu kointegracji przed ewentualnym włączeniem zmiennych sztucznych do modelu. Należy jednak zauważyć, że gdy skośność i leptokurtyczność reszt wynika z innych przyczyn, na przykład takich jak nieuwzględnione zmiany strukturalne, wówczas właściwa strategia wnioskowania wymaga zawarcia odpowiednich zmiennych deterministycznych w modelu VEC, przed weryfikacją rzędu kointegracji (zob. np. Johansen i in., 2000).

Analiza mocy małopróbkowych testów rzędu kointegracji dla składnika losowego pochodzącego z rozkładu skośnego, leptokurtycznego przeprowadzona została dla analogicznego system pięciu zmiennych stochastycznych będących realizacją procesu zintegrowanego w stopniu pierwszym, w którym występują trzy wspólne trendy stochastyczne dla (prawdziwej) hipotezy alternatywnej (por. Kęblowski, 2013). DGP został określony następująco:

$$\Delta \mathbf{y}_t^{DGP} = (\mathbf{y}_{t-1}^{DGP} \mathbf{B} + \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{A}^T + (\mathbf{y}_{t-1}^{DGP} \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\varphi}_1) \mathbf{A}_1^T + \Delta \mathbf{y}_{t-1}^{DGP} \boldsymbol{\Gamma}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (9)$$

gdzie  $\mathbf{B}_1$  i  $\mathbf{A}_1$  są macierzami parametrów o wymiarach  $P \times (R - r)$  i pełnego rzędu,  $\boldsymbol{\varphi}_1$  oznacza  $(R - r)$ -elementowy wektor parametrów, a  $r$  to weryfikowany rząd kointegracji ( $r < R$ ).

Tabela 3.

Relatywne prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy zerowej (w %),  $P = 5$ ,  $r = 1$ ,  $R = 2$ ,  $T = 50$ , DGP (9), składnik losowy generowany przez rozkład  $S_U(0; 1; -0,75; 6)$

$\alpha \setminus \xi$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$LR$	9,4	12,3	21,1	36,8	72,7	99,6
$LR^{BC}$	0,7	0,8	1,0	1,4	2,3	10,1
$LR^{RA}$	0,3	0,6	1,5	4,8	22,3	90,9
-0,1 $LR^{CL}$	0,5	0,8	2,1	6,2	26,9	92,8
$LR^{HR}$	2,9	3,7	7,5	16,9	49,3	97,7
$LR^B$	0,3	0,4	0,5	0,7	1,8	21,0
$LR^{BCB}$	0,3	0,5	0,7	1,0	1,6	4,5



Tabela 3.

-0,2	<i>LR</i>	15,2	18,8	29,8	48,3	81,9	99,8
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	1,8	2,0	2,7	4,0	8,3	18,6
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	1,0	1,4	3,1	8,8	33,8	94,8
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	1,3	1,9	4,0	10,9	38,3	95,8
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	4,7	6,7	12,4	25,5	61,8	98,8
	<i>LR<sup>B</sup></i>	0,9	1,0	1,4	2,2	5,5	42,3
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	1,0	1,2	1,7	2,8	5,6	15,6
-0,4	<i>LR</i>	28,2	34,4	48,2	70,9	95,2	99,9
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	5,8	7,1	9,7	15,8	33,0	39,6
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	2,7	3,8	8,0	21,0	65,9	98,9
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	3,7	5,0	1,0	25,1	70,3	99,1
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	11,5	15,1	24,2	46,7	85,5	99,8
	<i>LR<sup>B</sup></i>	2,9	3,4	4,4	8,8	27,9	81,3
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	3,5	4,2	5,8	11,1	29,2	50,0
-0,6	<i>LR</i>	42,1	49,0	65,8	86,6	99,2	99,9
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	13,5	16,1	21,9	35,8	61,3	57,5
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	5,6	8,0	15,9	40,6	86,3	99,8
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	7,1	10,3	19,4	45,6	89,1	99,9
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	19,8	25,1	40,5	68,3	96,3	99,9
	<i>LR<sup>B</sup></i>	6,3	8,0	11,7	24,2	60,2	95,0
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	7,7	9,8	14,2	28,2	61,5	73,4
-0,8	<i>LR</i>	53,8	61,2	78,7	95,3	99,8	99,9
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	22,4	26,5	38,4	59,1	81,0	70,4
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	9,6	12,9	28,0	62,5	95,3	99,9
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	12,3	16,2	32,9	67,3	96,5	99,9
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	28,7	35,6	55,8	85,1	99,0	99,9
	<i>LR<sup>B</sup></i>	11,8	14,1	23,5	45,7	82,6	98,6
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	13,9	16,8	27,3	50,5	83,3	85,6
-0,9	<i>LR</i>	59,5	66,0	83,5	97,1	99,9	99,9
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	27,2	31,6	45,9	68,3	87,1	74,1
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	12,0	16,1	34,6	71,0	97,4	99,9
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	15,1	19,7	39,8	75,1	98,0	99,9
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	33,5	41,1	63,2	89,5	99,5	99,9
	<i>LR<sup>B</sup></i>	15,1	18,1	30,3	56,9	89,3	99,4
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	17,6	20,8	34,5	61,4	89,6	88,9

Tabela 4.

Relatywne prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy zerowej (w %),  $P = 5$ ,  $r = 1$ ,  $R = 2$ ,  $T = 50$ ,  
DGP (9), składnik losowy generowany przez proces gaussowskiego białego szumu

$\alpha \setminus \zeta$		0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
-0,1	<i>LR</i>	9,1	11,4	19,4	38,1	72,9	99,6
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	0,7	0,8	1,0	1,1	2,2	10,2
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	0,4	0,7	1,3	4,6	21,5	90,3
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	0,5	0,8	2,0	6,0	25,4	92,3
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	2,6	3,7	7,7	17,1	47,9	98,0
	<i>LR<sup>B</sup></i>	0,4	0,3	0,5	0,6	1,5	20,6
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	0,4	0,4	0,7	0,7	1,3	4,9
-0,2	<i>LR</i>	14,6	17,7	28,6	48,4	82,1	99,8
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	1,7	1,9	23,5	3,8	7,7	18,3
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	0,9	1,2	2,8	8,1	34,1	95,4
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	1,2	1,6	3,8	10,5	39,2	96,3
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	4,8	6,7	11,7	25,2	62,8	98,9
	<i>LR<sup>B</sup></i>	0,8	0,9	1,1	1,9	5,1	43,5
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	1,0	1,0	1,7	2,6	5,1	15,6
-0,4	<i>LR</i>	28,2	33,5	48,8	70,5	95,5	99,9
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	5,8	6,6	10,1	15,7	32,5	40,1
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	2,5	3,8	8,4	20,8	64,9	99,0
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	3,4	4,8	10,6	24,8	69,4	99,2
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	10,9	14,8	25,3	46,2	86,1	99,8
	<i>LR<sup>B</sup></i>	2,7	3,4	5,1	9,1	27,9	81,7
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	3,4	4,2	6,5	11,2	29,3	49,7
-0,6	<i>LR</i>	42,5	48,3	64,9	87,2	99,1	99,9
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	13,5	15,6	22,1	36,9	60,6	58,9
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	5,7	7,9	15,9	41,1	86,2	99,9
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	7,7	10,0	19,3	46,4	88,7	99,9
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	19,5	24,8	40,1	68,7	96,0	99,9
	<i>LR<sup>B</sup></i>	6,7	8,0	11,7	24,7	60,0	95,5
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	8,2	9,4	14,3	28,8	61,2	74,4

Tabela 4.

-0,8	<i>LR</i>	54,1	60,7	79,3	95,2	99,8	99,9
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	23,2	26,0	37,6	59,2	81,8	70,0
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	9,6	13,2	27,4	62,4	95,5	99,9
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	12,2	16,6	32,2	67,2	96,4	99,9
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	29,0	35,1	55,9	84,8	99,0	99,9
	<i>LR<sup>B</sup></i>	12,0	14,3	23,5	46,6	83,2	98,9
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	14,1	16,9	27,7	51,4	84,1	86,2
-0,9	<i>LR</i>	58,9	66,3	84,6	97,2	99,9	99,9
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	26,9	31,6	45,2	67,5	87,6	75,3
	<i>LR<sup>RA</sup></i>	11,5	16,0	33,1	70,3	97,1	99,9
	<i>LR<sup>CL</sup></i>	14,4	19,6	38,5	74,6	97,9	99,9
	<i>LR<sup>HR</sup></i>	32,7	40,3	62,9	89,8	99,6	99,9
	<i>LR<sup>B</sup></i>	14,6	18,2	29,5	56,4	89,3	99,5
	<i>LR<sup>BCB</sup></i>	17,0	21,1	33,5	60,9	89,8	89,8

Tabela 5.

Moc testu (w %) dla rozmiaru równego 5%,  $P = 5$ ,  $r = 1$ ,  $R = 2$ ,  $T = 50$ , DGP (9), składnik losowy generowany przez rozkład  $S_U(0; 1; -0,75; 6)$

$\alpha \setminus \zeta$		0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
-0,1	<i>LR</i>	6,1	6,8	6,7	6,6	7,2	15,3
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	5,9	6,4	7,0	6,5	8,2	15,3
-0,2	<i>LR</i>	8,2	9,3	9,5	10,2	11,1	29,7
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	7,7	9,1	9,9	10,9	14,9	27,6
-0,4	<i>LR</i>	13,5	14,9	15,4	18,1	28,7	66,2
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	14,9	16,1	17,3	21,6	35,0	53,7
-0,6	<i>LR</i>	19,2	21,1	23,9	32,5	54,9	86,6
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	20,8	23,9	28,2	37,6	61,3	72,9
-0,8	<i>LR</i>	25,6	28,3	36,3	50,8	76,9	95,2
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	29,1	32,4	41,7	57,7	81,2	82,6
-0,9	<i>LR</i>	29,1	32,2	42,4	60,5	84,2	97,4
	<i>LR<sup>BC</sup></i>	33,7	36,4	47,5	66,5	87,4	85,5

Relatywne prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy zerowej zestawione w tabeli 3 nie różnią się istotnie od wyników dla przypadku, gdy składnik losowy jest generowany przez proces gaussowskiego białego szumu (tabela 4). Ponadto moc testów (tabela 5) w obydwu przypadkach jest zbliżona, co wynika z braku istotnego wpływu skośności i leptokurtyczności reszt na empiryczny rozmiar testów. W przypadku gdy reszty nie pochodzą z rozkładu normalnego, lecz są generowane przez rozkład skośny, leptokurtyczny, wówczas testy rzędu kointegracji oparte na regule ilorazu wiarygodności są odporne na niespełnienie założenia, że reszty pochodzą z rozkładu normalnego, zarówno ze względu na rozmiar testu, jak i moc.

Wyniki powyższych badań pozwalają rozszerzyć wcześniejszy wniosek, zgodnie z którym właściwa strategia małopróbkowego wnioskowania o rzędzie kointegracji polega na weryfikacji rzędu kointegracji przed ewentualnym włączeniem zmiennych sztucznych do modelu, gdy składnik losowy jest generowany przez rozkład skośny, leptokurtyczny (albo platykurtyczny), również na przypadek mocy testu. Uwzględnienie zmiennych sztucznych impulsowych w modelu VEC przed weryfikacją rzędu kointegracji tak, aby testy wskazywały, że reszty są generowane przez proces gaussowskiego białego szumu, gdy składnik losowy jest generowany przez proces skośny leptokurtyczny, może prowadzić do niecelowego pogorszenia małopróbkowych właściwości rozważanych testów kointegracji.

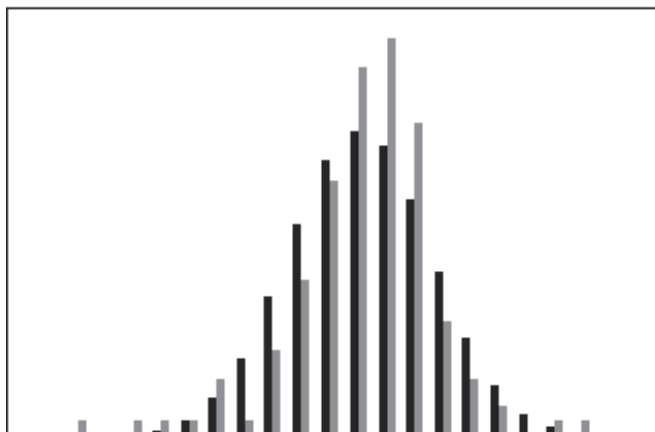
#### 4. PODSUMOWANIE

Wyniki eksperymentów Monte Carlo wskazują, że testy liczby relacji kointegrujących oparte na regule ilorazu wiarygodności są odporne, gdy składnik losowy pochodzi z rozkładu skośnego, leptokurtycznego, aproksymowanego rozkładem  $S_U$  Johnsona, zamiast z wielowymiarowego rozkładu normalnego. Stąd też, uwzględnienie zmiennych sztucznych w modelu VEC przed wnioskowaniem o rzędzie kointegracji, tak aby testy potwierdzały założenie o normalności rozkładu reszt, może prowadzić do niecelowego pogorszenia małopróbkowych właściwości rozważanych testów kointegracji. Jednak w tych przypadkach, w których przyczyną skośności lub leptokurtyczności reszt są jednorazowe szoki strukturalne, zwykle dobrze uzasadnione zdarzeniami ekonomicznymi, politycznymi lub zmianami definicyjnymi, wówczas zmienne deterministyczne powinny być zawarte w modelu przed weryfikacją rzędu kointegracji.

## LITERATURA

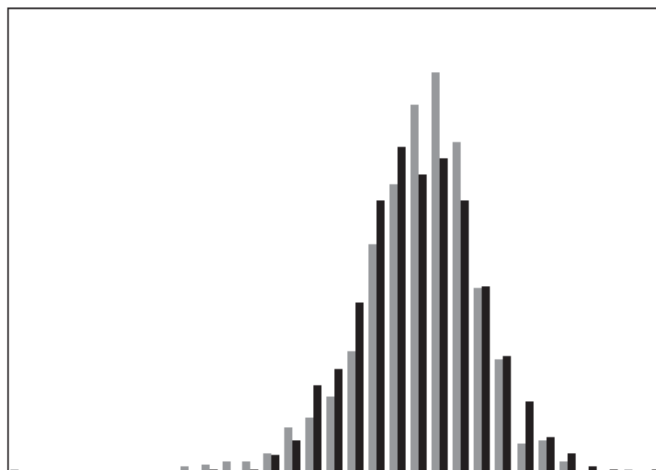
- [1] Cheung Y.-W., Lai K. S., (1993), Finite-Sample Sizes of Johansen's Likelihood Ratio Tests for Cointegration, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 55, 313–328.
- [2] Edgeworth F. Y., (1898), On the Representation of Statistics by Mathematical Formulae, *Journal of the Royal Statistical Society*, 61, 670–700.
- [3] Gonzalo J., (1994), Five Alternative Methods of Estimating Long-Run Equilibrium Relationships, *Journal of Econometrics*, 60, 203–233.
- [4] Hansen H., Rahbek A., (2002), Approximate Conditional Unit Root Inference, *Journal of Time Series Analysis*, 23, 1–28.
- [5] Johansen S., (1988), Statistical Analysis of Cointegration Vectors, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231–254.
- [6] Johansen S., (1996), *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press, Oxford.
- [7] Johansen S., (2002), A Small Sample Correction for the Test of Cointegrating Rank in the Vector Autoregressive Model, *Econometrica*, 70, 1929–1961.
- [8] Johansen S., Mosconi R., Nielsen B., (2000), Cointegration Analysis in the Presence of Structural Breaks in the Deterministic Trend, *Econometrics Journal*, 3, 216–249.
- [9] Johnson N. L., (1949), Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation, *Biometrika*, 36, 149–176.
- [10] Kębłowski P., (2009), Małopróbkowe wnioskowanie o rzędnice kointegracji, rozprawa doktorska.
- [11] Kębłowski P., (2013), Właściwości metod małopróbkowego wnioskowania o rzędnice kointegracji, *Przegląd Statystyczny*, 60 (2), 163–185.
- [12] Kębłowski P., Welfe A., (2010), Estimation of the Equilibrium Exchange Rate: The CHEER Approach, *Journal of International Money and Finance*, 29 (8), 1385–1397.
- [13] Pajor A., (2006), Bivariate Bayesian VECM-SV Models for Polish Exchange Rates, *Przegląd Statystyczny*, 53 (3), 9–26.
- [14] Reimers H.-E., (1992), Comparisons of Tests for Multivariate Cointegration, *Statistical Papers*, 33, 335–359.
- [15] Reinsel G. C., Ahn S. K., (1989), Likelihood Ratio Test for Unit Roots and Forecasting Properties in the Nonstationary Vector AR Model, materiał powielony.
- [16] Reinsel G. C., Ahn S. K., (1992), Vector AR Models with Unit Roots and Reduced Rank Structure: Estimation, Likelihood Ratio Test, and Forecasting, *Journal of Time Series Analysis*, 13, 353–375.
- [17] Swensen A. R., (2006), Bootstrap Algorithms for Testing and Determining the Cointegration Rank in VAR Models, *Econometrica*, 74, 1699–1714.
- [18] Toda H. Y., (1994), Finite Sample Properties of Likelihood Ratio Tests for Cointegrating Ranks when Linear Trends are Present, *The Review of Economics and Statistics*, 76, 66–79.
- [19] Toda H. Y., (1995), Finite Sample Performance of Likelihood Ratio Tests for Cointegrating Ranks in Vector Autoregressions, *Econometric Theory*, 11, 1015–1032.

## ANEKS



Rysunek A1. Histogramy standaryzowanego rozkładu normalnego oraz standaryzowanych reszt dla równania stóp procentowych obligacji skarbowych 5-letnich w Polsce w modelu VECM bez zmiennych sztucznych

Słupki czarne oznaczają histogram standaryzowanego rozkładu normalnego, słupki szare przedstawiają histogram standaryzowanych reszt dla równania stóp procentowych obligacji skarbowych 5-letnich w Polsce w modelu VECM bez zmiennych sztucznych, gdzie trzeci i czwarty moment centralny standaryzowany są równe odpowiednio:  $-0,60$  i  $5,36$  (zob. model w: Kęblowski, Welfe, 2010).



Rysunek A2. Histogramy standaryzowanego rozkładu normalnego oraz rozkładu  $S_U(0; 1; -0,75; 6)$

Słupki czarne oznaczają histogram standaryzowanego rozkładu normalnego, słupki szare przedstawiają histogram rozkładu  $S_U$  Johnsona (1949), gdzie wartość oczekiwana i wariancja są równe odpowiednio: zero i jeden, a trzeci i czwarty moment centralny standaryzowany były równe odpowiednio:  $-0,75$  i  $6,00$ . Histogramy wyznaczano na podstawie tysiąca realizacji ze standaryzowanego rozkładu normalnego, generowanych za pomocą generatora liczb pseudolosowych programu MS Excel 2003.

WNIOSKOWANIE O RZĘDZIE KOINTEGRACJI DLA MODELU VEC  
ZE SKŁADNIKIEM LOSOWYM Z ROZKŁADU  $S_U$  JOHNSONA

Streszczenie

Artykuł przedstawia wyniki analiz Monte Carlo własności małopróbkowych testów rzędu kointegracji dla modelu VEC ze składnikiem losowym pochodzącym z rozkładu skośnego, leptokurtycznego. Analiza przeprowadzana jest dla testu asymptotycznego, testów z poprawkami na liczbę stopni swobody, testu z poprawką Bartletta, testu bootstrapowego oraz testów z poprawką Bartletta w roli surogatu podwójnego testu bootstrapowego. Wyniki eksperymentów wskazują, że testy liczby relacji kointegrujących oparte na regule ilorazu wiarygodności są odporne ze względu na rozmiar jak i moc testu, gdy składnik losowy pochodzi z rozkładu skośnego, leptokurtycznego, aproksymowanego rozkładem  $S_U$  Johnsona, zamiast z wielowymiarowego rozkładu normalnego.

**Słowa kluczowe:** rozkład reszt o grubych ogonach, rozkład  $S_U$  Johnsona, wnioskowanie małopróbkowe, rząd kointegracji

INFERENCE ON COINTEGRATION RANK FOR A VEC MODEL  
WITH THE  $S_U$  JOHNSON ERROR DISTRIBUTION

Abstract

Performance of small-sample cointegration rank tests is investigated within the framework of a VEC model with skewed fat-tailed error distribution. The Monte Carlo analysis is conducted for: asymptotic test, tests with degrees-of-freedom corrections, test with Bartlett correction, bootstrap test, and bootstrap test with Bartlett correction, as a surrogate of double bootstrap test. The results indicate that the small-sample cointegration rank tests are robust to skewed fat-tailed error distribution, approximated by  $S_U$  Johnson distribution, with respect to size and power of these tests.

**Keywords:** fat-tailed error distribution,  $S_U$  Johnson distribution, small sample inference, cointegration rank

