

ANETA ZGLIŃSKA-PIETRZAK

ZASTOSOWANIE METODY BOOTSTRAPOWEJ W ANALIZIE PORTFELOWEJ

1. WSTĘP

Metody bootstrapowe, zwane też sznurowadłowymi (zob. np. Domański, Pruska, 2000) to metody zwrotnego losowania prób w celu ich wykorzystania do liczenia wartości bootstrapowych różnych funkcji (statystyk, funkcjonałów). Znalazły one zastosowanie w wielu dziedzinach nauki. Po raz pierwszy zostały zaprezentowane przez Efrona (1979) we wnioskowaniu statystycznym. Od tej pory popularność tych metod nieustannie wzrasta. W literaturze z zakresu wnioskowania statystyczno-ekonometrycznego w ramach tych metod można wyróżnić m.in. ich zastosowanie do badania przedziałów ufności i do rozwiązywania problemów analizy szeregów czasowych.

Pierwsze z wymienionych zastosowanie algorytmu bootstrapowego dotyczyło wyznaczania standardowych błędów estymatorów parametrów rozkładu zmiennej losowej oraz przedziałów ufności dla wartości wybranej statystyki (Efron, 1979; Efron, Tibshirani, 1993).

W przypadku szeregów czasowych metody bootstrapowe stosuje się m.in. do analizy struktury szeregu czasowego lub do weryfikacji hipotezy zakładającej postać lub rząd zintegrowania szeregu. Powszechnie jest również stosowanie tych metod do badania mocy testów, gdyż w porównaniu z metodami Monte Carlo dostarczają one dokładniejszego przybliżenia asymptotycznego przez zastosowanie tzw. rozwinięcia Edgewortha (Hall, 1992).

Metody bootstrapowe należą do klasy metod symulacyjnych polegających na wnioskowaniu o danej wartości procesu na podstawie wielokrotnego losowania obserwacji z próby pierwotnej (*resampling methods*). Losowania biorą pod uwagę wszystkie możliwe kombinacje elementów pochodzących z próby, bazując na danych rzeczywistych. Wykorzystanie losowań zwrotnych może być praktycznym rozwiązaniem w sytuacjach, gdy jakość lub ilość zebranych informacji nie pozwala na zastosowanie klasycznych metod statystycznych.

W analizach dotyczących rynku finansowego, w szczególności opartych na informacjach pochodzących z giełd, z uwagi na ich częstotliwość, zazwyczaj nie ma problemu z dostępnością i liczebnością danych. Jednak i w tym przypadku założenie przeprowadzenia analiz na bardzo długich szeregach wiąże się z potrzebą zebranie ogromnej ilości danych, co bywa kłopotliwe. Dlatego interesujące wydaje się zastosowanie metod bootstrapowych „powielających” możliwości zachowania się rynku z za-

chowaniem dziennych korelacji między poszczególnymi notowaniami. W szczególności można wykorzystując bootstrapowe wartości stóp zwrotu $\{R_{i,t}^*\}$, \bar{R}_i^* i ryzyka $(S_{p,t}^2)^*$ wyznaczyć bootstrapowe wartości procentowych udziałów w_i^* poszczególnych akcji takich, że ryzyko związane z portfelem jest minimalne.

Metody bootstrapowe stosowano w analizach finansowych już wielokrotnie i w różnych celach. Przegląd zastosowań tych metod w modelowaniu finansowych szeregów czasowych można znaleźć między innymi w pracach Domańskiego i Pruskiej (2000), Horowitza (2001) oraz Li i Maddali (1996). Za pomocą metod bootstrapowych podjęto też próbę wyznaczania gęstości predyktorów stóp zwrotu lub ich przedziałów dla różnych modeli (por. np. Pscual, Romo, Ruiz, 2000; Thombs, Schucany, 1990) oraz szacowania VaR (*Value-at-Risk*) (np. Vlaar, 2000).

W analizie portfolio metody te były stosowane m.in. do testowania efektywności portfela (np. Shanken, 1996), konstruowania portfela z wykorzystaniem teorii Markowitza dla którego stopa zwrotu byłaby maksymalna (Zhidong i in., 2009), analizy wariancji mierzącej ryzyko i konstrukcji portfela dla zadanych wartości skłonności do ryzyka (np. Markowitz, Usmen, 2003; Michaud, 1998) jak również do optymalizacji portfela przy założeniu, że stopy zwrotu oraz macierz wariancji-kowariancji jest nieznana (Lai, Xing, Chen, 2011).

2. METODOLOGIA

W przeprowadzonej analizie punktem wyjścia była teoria Markowitza. Stopy zwrotu zostały zdefiniowane jako tempo wzrostu kursów akcji poszczególnych spółek według formuły:

$$R_{i,t} = \ln\left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}}\right), \quad (1)$$

gdzie $p_{i,t}$ – kurs i -tego instrumentu finansowego w czasie $t = 1, 2, \dots, n$.

W teorii Markowitza zakłada się, że stopy zwrotu akcji są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną utożsamianą z oczekiwaną stopą zwrotu i odchyleniem standardowym utożsamianym z ryzykiem. Zakłada się, że zarówno stopy zwrotu jak i macierz wariancji-kowariancji między nimi są znane. Jednak w praktyce są one nieznane i muszą być estymowane np. na podstawie danych empirycznych z przeszłości. Oczekiwaną stopę zwrotu dla instrumentów „ i ” wyznaczono jako średnią arytmetyczną poszczególnych przeszłych stóp zwrotu

$$\bar{R}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_{i,t}, \quad (2)$$

zaś ryzyko jako odchylenie standardowe

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_{i,t} - \bar{R}_i)^2} \quad (\text{np. Haugen, 1996}). \quad (3)$$

Dla portfela złożonego z m składników oczekiwaną stopę zwrotu $E_p(R)$ wyznacza się jako średnią ważoną wyrażoną wzorem

$$E_p(R) = \bar{R} = \sum_{i=1}^m w_i \bar{R}_i, \quad (4)$$

gdzie w_i – udział akcji i w portfelu, przy czym $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ oraz $\forall_i w_i \geq 0$, m – liczba spółek wchodzących w skład portfela. Ryzyko portfela mierzone jest wariancją przeszłych stóp zwrotu poszczególnych instrumentów finansowych

$$S_p^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j \hat{\sigma}_{ij}, \quad (5)$$

gdzie $\hat{\sigma}_{ij}$ – empiryczna kowariancja (wariancja dla $i = j$) pomiędzy stopą zwrotu akcji i -tej oraz j -tej (por. np. Haugen, 1996). W notacji macierzowej stopę zwrotu (4) oraz ryzyko portfela (5) można krócej zapisać jak:

$$E_p(R) = \mathbf{w}^T \mathbf{R}, \quad S_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}, \quad (6)$$

gdzie \mathbf{R} – wektor stóp zwrotu $\mathbf{R} = [\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_m]^T$, \mathbf{w} – wektor udziałów poszczególnych akcji w portfelu $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$, Σ – macierz wariancji-kowariancji stóp zwrotu.

Teoria Markowitza (1952) dotyczy metody efektywnego doboru aktywów do portfela. Chodzi o wybór spośród wielu (a nawet wszystkich) akcji takiego zbioru, który spełni najlepiej oczekiwania inwestora. Formuła Markowitza jest zapisywana w postaci funkcji f opisującej zależność między stopą zysku a ryzykiem: $f = -AE_p(R) + S_p^2$ dla $0 \leq A < \infty$ gdzie A – wskaźnik skłonności do podejmowania ryzyka (Haugen, 1996; Markowitz, 1952). Formuła ta nie określa optymalnego portfela inwestycyjnego, ale można na jej podstawie uzyskać zbiór portfeli „opłacalnych” czyli dających maksymalny zysk przy danym poziomie ryzyka lub minimalne ryzyko przy danym poziomie zysku. ($A=0$ to portfel o najniższej stopie zwrotu). Poszukując portfela optymalnego, wystarczy rozwiązać optymalizacyjny problem programowania kwadratowego, mający na celu wyznaczenie takiego wektora wag $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$, aby:

$$S_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \rightarrow \min \quad (7)$$

przy warunkach ograniczających:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{R} = r_0, \quad \sum_{i=1}^m w_i = 1, \quad \text{gdzie } w_i \geq 0 \quad \forall_i. \quad (8)$$

Składowe wektora \mathbf{R} wyznaczamy stosując stopy zwrotu zdefiniowane formułą (1) dla empirycznych kursów akcji. Wymagana jest jak najdłuższa próba. Z uwagi na specyfikę rynku finansowego z portfelem akcji o niskim ryzyku związana będzie też niska stopa zwrotu. Stąd rozwiązując taki problem należy założyć najniższą stopę zysku możliwą do zaakceptowania przez inwestora.

Alternatywą może być dokonanie tych samych obliczeń na próbach bootstrapowych. Ogólna idea symulacyjnej metody bootstrapowej jest następująca: jako populację generalną traktuje się zbiór obserwacji $\mathbf{Z}_n = \{Z_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ z którego (stosując różne schematy) losuje się z powtórzeniem (zwracaniem) próby bootstrapowe i na ich podstawie dokonuje wnioskowania. Innymi słowy jeżeli $\mathbf{Z}_n = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ jest próbą losową z rozkładu charakteryzowanego przez parametr θ o którym wnioskujemy na podstawie statystyki ϕ , to próbę bootstrapową uzyskuje się przez n' -krotne (gdzie $\frac{2}{3}n \leq n' \leq n$, ale zazwyczaj $n' = n$) losowanie ze zwracaniem ze zbioru $\mathbf{Z}_n = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ uzyskując $\mathbf{Z}_{n'}^* = \{Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_{n'}^*\}$. Procedurę tworzenia takiego ciągu $\mathbf{Z}_{n'}^*$ powtarza się wielokrotnie (np. 10000) razy. W ten sposób uzyskuje się zadaną liczbę prób bootstrapowych $\mathbf{Z}_{n',j}^*$, (gdzie np. $j = 1, 2, \dots, 10000$) na podstawie których dokonuje się wnioskowania np. wyliczając odpowiednią statystykę ϕ . Uzyskany rozkład empiryczny służy do przeprowadzenia wnioskowania o parametrze θ . Dzięki temu można definiować statystyki testowe i przedziały ufności w sytuacjach, gdy standardowe rozkłady lub procedury nie mogą być stosowane lub ich zastosowanie nie daje jednoznacznych rozwiązań.

Podójście takie można również zastosować do obserwacji dotyczących notowań na rynku akcji, gdzie $\mathbf{Z}_{n,i} = \{R_{1,i}, R_{2,i}, \dots, R_{n,i}\}$. Dokonując losowania zwrotnego należy pamiętać o zachowaniu dziennych korelacji między poszczególnymi notowaniami. Zakłócenie tych korelacji spowodowałoby zupełną zmianę macierzy wariancji-kowariancji, co uniemożliwiłoby porównywanie wyników. Dla prób bootstrapowych, korzystając z tych samych wzorów (2)-(6) dokonuje się ponownego rozwiązania problemu (7)-(8) a następnie jako rozwiązanie podaje średnią z wag wszystkich portfeli (Michaud, 1998).

W badaniu uwzględniono notowania 150 spółek GPW posiadających notowania ciągłe od 3 stycznia 2010 roku do 14 lutego 2012 roku. Lista spółek z podziałem na sektory znajduje się w tabeli 1. Obliczając stopy zwrotu według formuły (1) uzyskano dla każdej spółki szeregi 553 obserwacji dziennych. Dane pochodzą ze strony www.stooq.pl oraz www.money.pl. Obliczeń dokonano z użyciem pakietu MATLAB. Na początek wyznaczono portfel optymalny klasycznie, na podstawie otrzymanych szeregów dziennych stóp zwrotu, a następnie procedurę powtórzono dla prób bootstrapowych. Dla każdego szeregu stóp zwrotu zostało wylosowanych 10000 prób bootstrapowych i na ich podstawie rozwiązano powyższy problem, uzyskując dla zadanych 10 różnych wartości stóp zwrotu portfele efektywne.

3. WYNIKI ANALIZY

W wyniku rozwiązania klasycznego zadania Markowitza oraz zagadnienia w wersji bootstrapowej otrzymano krzywe (rys. 1 i 2) będące zbiorem portfeli efektywnych.

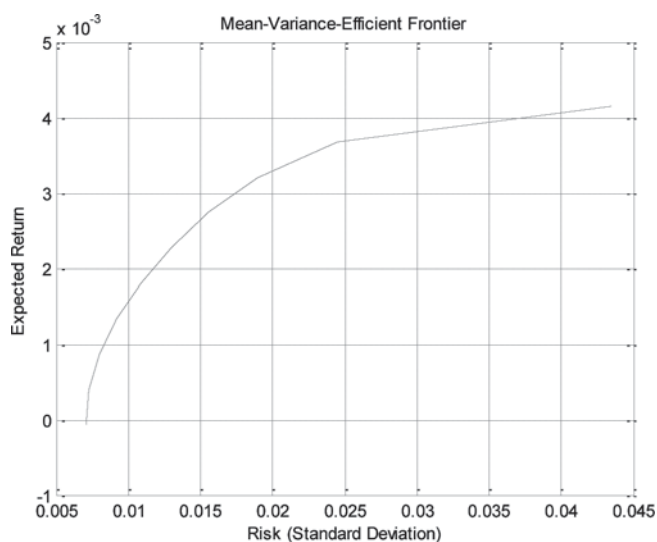
Tabela 1.

Spółki uwzględnione w analizie z podziałem na sektory

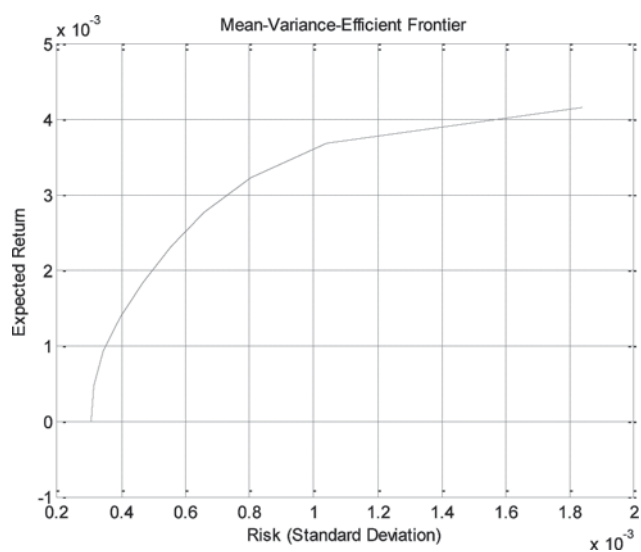
SEKTOR	SPÓŁKI									
BANKI	BHW	BPH	BRE	BSK	GNB	KRB	MIL	PEO	PKO	
BUDOWNICTWO	AWB	BDL	BDX	EPD	HBP	HRS	MRB	MSP	MSX	MSZ
	PBG	PXM	TRK							
DEWELOPERZY	BBD	DOM	ECH	GNT	GTC	JWC	KCI	LCC	OPG	PND
	RHD	TRI	TUP							
ENERGETYKA	CEZ	ENA	PEP	PGE						
FINANSE INNE	BBC	BBZ	BLI	CFL	CPA	EFH	IDM	JPR	KRI	KZS
	MCI	MWT	RBC	SKL	VIN					
HANDEL	ADS	BMI	COG	DPL	EMF	ETL	EUR	IPO	JAG	KCH
	KOM	MON	PEL	TEL	VST					
INFORMATYKA	ACP	ATG	CDR	CTC	PCG	SGN	SME			
MEDIA	AGO	CIA	CPS	IGR	K2I	MIT	TVN			
TELEKOMUNIKACJA	HWE	MNI	NET	TPS						
USŁUGI INNE	ATS	CHS	EEX	FON	INC	ITG	MVP	ZST		
Przemysł:										
CHEMICZNY	ATT	CIE	PCE	SNS						
ELEKTROMASZYNOWY	AMC	BMC	KPX	LEN	PUE	RFK	RLP	WFM		
FARMACEUTYCZNY	BIO	CRM	EUI	MIR						
HOTELE I RESTAUR	PLJ									
LEKKI	BTM	LBW	PRC	SKT						
MAT. BUDOWLANYCH	ARM	BRK	CNG	IZO	MCR	RSE	TIN			
METALOWY	ALC	BRS	CZP	FER	FSG	HTM	IPX	KGH	OBL	STP
MOTORYZACYJNY	GCN									
PALIWOWY	LWB	LTS	OIL	PGN						
SPOŻYWCZY	ALM	COL	GRL	KER	MAK	MSO	PBF			
TWORZYWA SZTUCZNE	EEF	ERG	RDL							

Poszczególne wielkości ryzyka dla wybranych z tej krzywej dziesięciu portfeli są podane w tabeli 2.

Okazuje się, że przy przyjęciu takiego samego poziomu stopy zwrotu na podstawie prób bootstrapowych jesteśmy w stanie uzyskać „lepszy” portfel ze względu na funk-



Rysunek 1. Ryzyko i stopa zwrotu dla portfeli efektywnych wyznaczonych klasycznie



Rysunek 2. Ryzyko i stopa zwrotu dla portfeli efektywnych wyznaczonych z prób bootstrapowych

cję celu. Poprzez zastosowanie takiej symulacji uzyskujemy udziały poszczególnych akcji w portfelu, które zapewniają prawie 20-krotnie mniejszą wariancję (czyli około 4-krotnie niższe ryzyko) niż w przypadku udziałów otrzymanych metodą klasyczną. Rezultat taki jest zgodny z wcześniejszymi sugestiami Michaud'a (1998), który zaproponował procedurę wyznaczania wag dla portfela optymalnego i stwierdził, że prowadzi ona do lepszego rozmieszczenia aktywów, które jednocześnie jest pokrewne wynikom metody klasycznej opartej na przeszłych obserwacjach. Przedstawiona w pracy Mil-

Tabela 2.

Stopa zwrotu i ryzyko związane z portfelami „opłacalnymi”

Stopa zwrotu	Ryzyko portfela	
	z próby empirycznej	z prób bootstrapowych
0,0001	0,0071	0,0003
0,0004	0,0073	0,0003
0,0009	0,0080	0,0003
0,0013	0,0092	0,0004
0,0018	0,0109	0,0005
0,0023	0,0130	0,0006
0,0027	0,0155	0,0007
0,0032	0,0190	0,0008
0,0037	0,0245	0,0010
0,0041	0,0434	0,0018

haud'a (1998) procedura wykorzystywała zależność między ryzykiem a stopą zwrotu, a wagi były wyznaczane dla różnych wartości skłonności do podejmowania ryzyka. Ostateczne rezultaty prowadziły do portfeli o lepszych parametrach niż te uzyskane metodą klasyczną. Można zatem stwierdzić, że stosując próby bootstrapowe dostajemy portfele, dla których oszacowana wariancja ma mniejszą wartość. Szczegółowe wyniki zamieszczone są w tabeli 3.

Podano skład 5 przykładowych portfeli efektywnych o zadanej stopie zwrotu. Spośród 150 spółek wziętych pod uwagę w skład portfela najbardziej rozbudowanego, jednocześnie portfela o najmniejszym ryzyku weszło ponad 35 spółek, a portfela o najwyższej z rozważanych stóp zwrotu ponad 19 spółek. W tabeli pominięto spółki, których udziały były mniejsze niż 0,1%. Zgodnie z teorią, ryzyko zmniejsza się już poprzez samą dywersyfikację portfela, co jest zgodne z prezentowanymi wynikami, gdyż im mniejsze jest ryzyko związane z danym portfelem, tym więcej spółek wchodzi w skład portfela.

W prezentowanych portfelach, dla pierwszego z nich największe udziały mają spółki CEZ, PGN i TPS. Analizując poszczególne udziały spółek zauważamy różnice nie tylko w wartościach wag, ale również w samym składzie. W portfelach dla najniższej stopy zwrotu 32 składowe z 35 spółek wchodzących w ich skład są te same. Jednak ich udziały są inne. Spółki ALC, EMF i CFL zostały wykluczone z portfela przez optymalizację na podstawie prób bootstrapowych, a znalazły się w portfelu wyznaczonym klasycznie z wagami kolejno 2%, 1% oraz 0,2%. Dla portfeli o stopie zwrotu 0,4% różnice między dwoma uzyskanymi innymi metodami są zdecydowanie większe. Portfel klasyczny składa się tylko z 28 składowych, natomiast drugi z nich ma ich 32.

Tabela 3.
Skład przykładowych portfeli uzyskanych z próby empirycznej i z prób bootstrapowych

Stopa zwrotu 0,0004			Stopa zwrotu 0,0009			Stopa zwrotu 0,0013			Stopa zwrotu 0,0023		
WAGI DLA PORTELA			WAGI DLA PORTELA			WAGI DLA PORTELA			WAGI DLA PORTELA		
SKRÓT NAZWY SPÓŁKI	KLASY- CZNY	BOOT- STRAP	SKRÓT NAZWY SPÓŁKI	KLASY- CZNY	BOOT- STRAP	SKRÓT NAZWY SPÓŁKI	KLASY- CZNY	BOOT- STRAP	SKRÓT NAZWY SPÓŁKI	KLASY- CZNY	BOOT- STRAP
CEZ	0,1242	0	TPS	0,1197	0,1146	ITG	0,1414	0,1324	ITG	0,2436	0,24
TPS	0,112	0	CEZ	0,117	0,1041	TPS	0,1068	0,1037	EEX	0,1147	0,1067
PGN	0,0814	0,0534	ITG	0,0934	0,0849	CEZ	0,096	0,0822	SNS	0,1142	0,0969
ETL	0,0723	0	RDL	0,0669	0,0647	RDL	0,068	0,0623	CIA	0,0751	0,0819
RDL	0,0576	0,0031	ETL	0,0653	0,079	LBW	0,0665	0,0523	K2I	0,0738	0,0672
PGM	0,0545	0,0136	LBW	0,0541	0,0465	EEX	0,0614	0,057	LBW	0,0597	0,0376
ITG	0,051	0,004	VIN	0,0531	0,0619	SME	0,0494	0,0484	KZS	0,0549	0,0857
CNG	0,0424	0	PGN	0,0521	0,0384	VIN	0,0492	0,053	SME	0,0519	0,0445
BMC	0,0355	0,0037	BMC	0,0448	0,0598	SNS	0,0486	0,0461	RDL	0,0416	0,0233
SME	0,0339	0,006	SME	0,0439	0,0454	K2I	0,0456	0,0494	TPS	0,033	0,0425
LBW	0,0324	0,0281	EEX	0,0374	0,0337	BMC	0,0448	0,0609	ATT	0,0307	0,0627
KRI	0,0237	0	K2I	0,0328	0,0376	ETL	0,0415	0,0561	CRM	0,0252	0,0232
TEL	0,0234	0,1066	ATT	0,0276	0,0441	ATT	0,0336	0,0534	BMC	0,0235	0,0399
AWB	0,0228	0,0258	KCH	0,0204	0,0172	CIA	0,0212	0,0245	CDR	0,016	0,0171
ENA	0,0215	0	AWB	0,0203	0,009	KCH	0,0208	0,018	PBF	0,0149	0,0029
K2I	0,0192	0,0026	SNS	0,0178	0,0214	KER	0,0166	0,0059	EUR	0,0111	0
EEX	0,0175	0,0016	KRI	0,0173	0,0229	PCE	0,0134	0,0146	VIN	0,009	0,0097
KCH	0,0162	0,0333	RLP	0,0158	0,0027	EUR	0,0113	0	PCE	0,0063	0,0126
ATT	0,0152	0,0323	TEL	0,015	0,0028	PBF	0,0107	0,0046	KCH	0	0,0055

cd. Tabela 3.

BDX	0,0149	0,0514	BDX	0,014	0,0233	RLP	0,0093	0
RLP	0,0144	0,0375	PCE	0,014	0,0133	KZS	0,0077	0,0294
PCE	0,0113	0,0606	KER	0,0138	0,0094	PGN	0,007	0
INC	0,0099	0,0267	CNG	0,0097	0	CRM	0,0062	0,006
FER	0,0089	0,0432	PBF	0,0085	0,0042	KRI	0,0054	0,0097
EMF	0,0053	0,0143	PGM	0,0072	0,0026	AWB	0,0049	0
PBF	0,0037	0,0052	OBL	0,0064	0,0051	CDR	0,0038	0,0066
ALC	0,002	0,0127	PUE	0,0052	0,0149	BDX	0,0036	0,0104
KER	0,0019	0,0134	INC	0,0035	0,0115	OBL	0,0032	0
CDR	0	0,1142	CFL	0,0027	0	PUE	0,002	0,0113
CRM	0	0,0142						
EUR	0	0,0858						
IPO	0	0,0225						
KZS	0	0,0166						
PEP	0	0,0703						
SNS	0	0,0136						
TUP	0	0,0542						
WFM	0	0,0158						

Tabela 4.
Realizacja stóp zwrotu dla uzyskanych portfeli

Portfel uzyskany metodą	Zakładana dzienna stopa zwrotu									
	0,0001		0,0004		0,0009		0,0013		0,0023	
	dzienna	miesięczna	dzienna	miesięczna	dzienna	miesięczna	dzienna	miesięczna	dzienna	miesięczna
klasyczną	0,00037	0,00623	0,00045	0,01007	0,00778	0,03026	0,00960	0,04370	0,01129	0,08446
bootstrapową	0,00034	0,01319	0,00526	0,02261	0,00712	0,02761	0,00878	0,04575	0,00862	0,08569

W zależności od sposobu wyznaczania portfela największe udziały ma spółka CEZ oraz TPS a w przypadku prób bootstrapowych TEL. 22 spółki są składowymi dwóch portfeli jednocześnie, ale ich udziały znacznie się różnią. Dla kolejnych trzech stóp zwrotu wnioski są analogiczne. Spółki o największych udziałach to kolejno CEZ, ITG i TPS a dla ostatniego ITG i EEX. Konstrukcja tych portfeli jest więc inna. Różnica polega nie tylko na doborze wag, ale również na samym składzie poszczególnych portfeli. Dotyczy to zarówno metody jak i założonej wartości stopy zwrotu. Ponieważ jednak większość spółek wchodzących w skład poszczególnych portfeli jest taka sama, można powiedzieć, że portfele te są pokrewne.

Dokładna analiza udziałów procentowych poszczególnych spółek w połączeniu z analizą ich kondycji finansowej i stóp zwrotu została pominięta, gdyż nie była ona celem tej pracy.

4. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono możliwości zastosowania bootstrapu do analizy portfelowej. Okazuje się, że przy pomocy prostej symulacji bootstrapowej można skonstruować dla zadanego poziomu stopy zwrotu portfel, z którym związane będzie dużo mniejsze ryzyko niż w przypadku zastosowania metody klasycznej. Składy portfeli uzyskanych dwoma sposobami są inne. Większość spółek wchodzi w ich skład w obu przypadkach, ale ich udziały procentowe (wagi) różnią się między sobą. Z uwagi na prawie 4-krotnie mniejszą wartość ryzyka związaną z portfelem uzyskanym dzięki zastosowaniu prób bootstrapowych, metoda ta może być rekomendowana jako alternatywny sposób rozwiązywania problemu optymalizacji portfela. Jednak należy pamiętać, że dla inwestora ryzyko nie jest jedynym kryterium w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych. Aby wnioskować o rzeczywistej przewadze portfeli bootstrapowych nad ich klasycznymi odpowiednikami, zostały prześledzone realizacje stóp zwrotu dla uzyskanych portfeli. Wyniki przedstawia tabela 4. Okazuje się, że konstrukcja portfeli za pomocą metody bootstrapowej w porównaniu z klasyczną nie zapewnia zawsze większej stopy zwrotu, tym samym nie można stwierdzić jednoznacznie, że metoda ta jest z punktu widzenia inwestora efektywniejsza od metody klasycznej. W obu przypadkach uzyskane dzienne stopy zwrotu były zazwyczaj niższe od założonych. Jednak należy zwrócić uwagę, że portfele uzyskane za pomocą symulacji są z założenia obarczone mniejszym ryzykiem, co jest dla inwestora asekuranta niewątpliwą zaletą tej metody. Wymaga ona jednak specjalnego oprogramowania lub użycia specjalnych funkcji, co może stanowić pewne utrudnienie w stosunku do metody klasycznej.

Uniwersytet Łódzki

LITERATURA

- [1] Berkowitz J., Kilian L., (2000), *Recent developments in bootstrapping time series*, *Econometrics Reviews*, vol. 19, 1-48.

- [2] Domański Cz., Pruska K., (2000), *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE Warszawa.
- [3] Efron B., (1979), *Bootstrap methods: another look at the jackknife*, Annals of Statistics, no. 7, 1-26.
- [4] Efron B., Tibshirani R. J., (1993), *The Introduction to the Bootstrap*, Chapman&Hall New York.
- [5] Hall P., (1992), *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*, New York, Springer-Verlag.
- [6] Haugen R.A., (1996), *Teoria nowoczesnego inwestowania. Obszerny podręcznik analizy portfelowej*, WIG-PRESS Warszawa.
- [7] Horowitz J.L., (2001), *The Bootstrap and Hypothesis Tests in Econometrics*, Journal of Econometrics, vol. 100, 37-40.
- [8] Lai T.L., Xing H., Chen Z., (2011), *Mean-Variance portfolio Optimization when Means and Covariances are Unknown*, The Annals of Applied Statistics, vol. 5, no. 2A, 798-823.
- [9] Li H., Maddala G.S., (1996), *Bootstrapping time series models*, Econometric Reviews, vol. 15, 115-158.
- [10] Markowitz H., (1952), *Portfolio selection*, Journal of Finance, vol. 7, no. 1, 77-91.
- [11] Markowitz H., Usmen N., (2003), *Resampled Frontiers versus Diffuse Bayes: An Experiment*, Journal of Investment Management, vol. 1 no. 4, 9-25.
- [12] Michaud R.O., (1998), *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*, Massachusetts: Harvard Business School Press.
- [13] Pascual L., Romo J., Ruiz E., (2000), *Forecasting returns and volatilities in GARCH processes using the bootstrap*, Working papers 00-63(31), Universidad Carlos III de Madrid, Spain.
- [14] Shanken J., (1996), *Statistical methods in tests of portfolio efficiency: a synthesis*. In: *Handbooks of Statistics: Statistical Methods in Finance*, edited by G. S. Maddala and C. R. Rao, 693-711, North-Holland.
- [15] Thombs L.A., Schucany W.R., (1990) *Bootstrap prediction intervals for autoregressions*, Journal of the American Statistical Association, 85, 486-492.
- [16] Vlaar P.J.G., (2000), *Value at risk models for Dutch bond portfolios*, Journal of Banking&Finance, vol. 24, 1131-1154.
- [17] Zhidong Bai, Huixia Liu, Wing-Keung Wong (2009), *On the Markowitz mean-variance analysis of self-financing portfolios*, RMI Working Paper no. 09/02.

ZASTOSOWANIE METODY BOOTSTRAPOWEJ W ANALIZIE PORTFELOWEJ

Streszczenie

Celem artykułu jest zastosowanie metodologii bootstrapu do poprawy rozwiązania zadania optymalizacji portfela akcji według modelu Markowitza. Zakładając, że stopy zwrotu i macierz wariancji-kowariancji są znane, w modelu minimalizuje się ryzyko wariacyjno-kowariancyjne przy spełnieniu, m.in. warunku osiągnięcia oczekiwanej lub założonej stopy zwrotu z portfela akcji. Klasyczna metoda Markowitza i jej wersja bootstrapowa dają odmienne rezultaty. W artykule omówiono portfele uzyskane na podstawie danych empirycznych i danych w postaci prób bootstrapowych losowanych zwrotnie oraz dokonano analizy różnic między nimi. Dane empiryczne dotyczą stóp zwrotu dla akcji Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie (GPW). Okazuje się, że zastosowanie losowych prób bootstrapowych pozwala uzyskać portfel o mniejszym ryzyku niż w przypadku portfela otrzymanego klasyczną metodą Markowitza.

Słowa kluczowe: metody bootstrapowe, analiza portfelowa

APPLICATION OF BOOTSTRAP METHOD FOR PORTFOLIO ANALYSIS

A b s t r a c t

This paper presents Markowitz's mean-variance portfolio optimization theory with and without bootstrap simulations. It is assumed that means and covariances of the assets returns are known and the variance with respect to a fixed expected return is minimized. It is concluded that there are significant differences between portfolios with and without bootstrap method and that the resampling data leads to asset allocations that are less risky. This methodology is applied in the Warsaw Stock Exchange.

Key words: bootstrap simulations, portfolio analysis