

EMIL PANEK

O PEWNEJ INTERPRETACJI SYSTEMU WALRASA Z ZAPASAMI

Przedstawiona w artykule [3] interpretacja modelu równowagi ogólnej typu Walrasa z zapasami budziła od początku niedosyt autora, czego wyrazem były w następstwie m.in. dyskusje na seminariach naukowych Katedry Ekonomii Matematycznej UE w Poznaniu. Do dyskusji tych nawiązuje bezpośrednio niniejsza notatka, w której przedstawiamy inną od zaprezentowanej we wspomnianym artykule interpretację ekonomiczną równań dynamiki cen i zapasów.

W klasycznym modelu L. Walrasa (zob. np [1], [4]) dynamikę cen w n -produktowej gospodarce opisuje (w najprostszej wersji) układ równań różniczkowych

$$\dot{p}(t) = \sigma(f^d(p(t)) - f^s(p(t))), \quad (1)$$

w którym $t \in [0, +\infty)$ oznacza zmienną (ciągłą) czasu, $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ jest wektorem cen towarów w momencie t , $f^d(p) = (f_1^d(p), \dots, f_n^d(p))$ jest funkcją zagregowanego popytu, a $f^s(p) = (f_1^s(p), \dots, f_n^s(p))$ jest funkcją zagregowanej podaży towarów przy cenach p ; σ jest dodatnim wskaźnikiem prędkości reakcji cen na zmianę popytu i podaży. Gospodarka osiąga równowagę, gdy ustalą się w niej takie ceny $\bar{p} > 0$, przy których dochodzi do zrównania popytu z podażą: $f^d(\bar{p}) = f^s(\bar{p})$. Wektor \bar{p} nazywamy wektorem cen równowagi rynkowej.

Transakcje kupna-sprzedaży towarów dochodzą do skutku dopiero po osiągnięciu równowagi. W rzeczywistości codzienne transakcje zawierane są permanentnie bez względu na to czy ceny $p(t)$ są cenami równowagi, czy nie i żaden z konsumentów ani producentów specjalnie się nad tym nie zastanawia. Oznacza to, że chwilowo na rynku może powstawać niedobór pewnych towarów (gdy $f_i^d(p(t)) > f_i^s(p(t))$) lub ich nadprodukcja (gdy $f_i^d(p(t)) < f_i^s(p(t))$), co prowadzi do tworzenia zapasów, o których nie ma mowy w klasycznym systemie Walrasa.

W artykule [3] przedstawiony został prosty model gospodarki konkurencyjnej typu L. Walrasa uwzględniający zapasy, które – wbrew temu jednak co na ogół obserwujemy w rzeczywistości – nie mają wpływu na ceny towarów na rynku. Ponadto dochody konsumentów stanowią w nim równowartość produkcji (czystej) sprzedanej, a nie wytworzonej, jak w oryginalnym systemie Walrasa.

Zaprezentowany we wspomnianej pracy model tworzy układ $2n$ równań różniczkowych dynamiki cen (1) i zapasów:

$$\dot{z}_i(t) = \begin{cases} f_i^s(p(t)) - f_i^d(p(t)) - \mu z_i(t), & \text{gdy } z_i(t) > 0, \\ \max\{f_i^s(p(t)) - f_i^d(p(t)), 0\}, & \text{gdy } z_i(t) = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ jest wektorem całkowitych zapasów w gospodarce w momencie t ; $\mu \in (0, 1)$ jest stopą naturalnego ubytku towarów. Zapas towaru rośnie, gdy ma miejsce jego nadprodukcja (skorygowana o naturalny ubytek zapasów: gdy $f_i^s(p(t)) > f_i^d(p(t)) + \mu z_i(t)$) i maleje w przypadku niedoboru towaru (gdy $f^d(p(t)) > f^s(p(t)) - \mu z_i(t)$). Dystrybucja towarów pochodzących z zapasów odbywa się nieodpłatnie poza rynkiem.

Poniżej proponujemy interpretację ekonomiczną modelu (1)-(2) odmienną od przedstawionej w pracy [3] i jak się wydaje bliższą rzeczywistości.

Jeżeli $p(t)$ jest wektorem cen towarów w momencie t , a $f^s(p(t))$ wektorem ich całkowitej podaży utożsamianej z produkcją wytworzoną, to wartość podaży towarów w gospodarce w momencie t wynosi $\langle p(t), f^s(p(t)) \rangle$; symbolem $\langle x, y \rangle$ oznaczamy iloczyn skalarny wektorów $x, y \in R^n$.

Zakładamy, że strumień dochodów w gospodarce $D(p(t))$ jest równy wartości produkcji wytworzonej:

$$D(p(t)) = \langle p(t), f^s(p(t)) \rangle.$$

Wektor produkcji sprzedanej w momencie t jest równy

$$S(p(t)) = \min \{ f^s(p(t)), f^d(p(t)) \} = \left(\min \{ f_1^s(p(t)), f_1^d(p(t)) \}, \dots, \min \{ f_n^s(p(t)), f_n^d(p(t)) \} \right).$$

Oczywiście, $S(p(t)) \leq f^s(p(t))$. Różnica

$$\begin{aligned} f^s(p(t)) - S(p(t)) &= \max \{ f^s(p(t)) - f^d(p(t)), 0 \} = \\ &= (\max \{ f_1^s(p(t)) - f_1^d(p(t)), 0 \}, \dots, \max \{ f_n^s(p(t)) - f_n^d(p(t)), 0 \}) \end{aligned} \quad (3)$$

przedstawia wektor towarów, które w momencie t nie znalazły nabywców i w związku z tym powiększają zapasy. Wartość niesprzedanej produkcji (wartość nadprodukcji) wynosi zatem

$$\langle p(t), f^s(p(t)) - S(p(t)) \rangle = \langle p(t), \max \{ f^s(p(t)) - f^d(p(t)), 0 \} \rangle.$$

Sprzedana produkcja $S(p(t))$ zaspokaja (częściowo lub całkowicie) popyt w momencie t , którego wartość nie przekracza, oczywiście, dochodów konsumentów:

$$\langle p(t), S(p(t)) \rangle \leq \langle p(t), D(p(t)) \rangle.$$

Różnica

$$\begin{aligned} N(p(t)) &= \max \{ f^d(p(t)) - f^s(p(t)), 0 \} = \\ &= (\max \{ f_1^d(p(t)) - f_1^s(p(t)), 0 \}, \dots, \max \{ f_n^d(p(t)) - f_n^s(p(t)), 0 \}) \end{aligned} \quad (4)$$

przedstawia wektor niezaspokojonego popytu w momencie t , zatem $\langle p(t), N(p(t)) \rangle$ oznacza wartość niezaspokojonego popytu w tym momencie. Jest to część dochodów konsumentów przewidziana na zakup towarów wyprodukowanych w niewystarczającej ilości. W celu zaspokojenia potrzeb konsumentów producenci sięgają po zapasy.

Zgodnie z prawem Walrasa, bez względu na ceny, wartość popytu jest równa wartości podaży:

$$\forall p \geq 0 \left(\langle p, f^d(p) \rangle = \langle p, f^s(p) \rangle \right)$$

i wobec tego

$$\begin{aligned} \langle p(t), N(p(t)) \rangle &= \langle p(t), \max \{ f^d(p(t)) - f^s(p(t)), 0 \} \rangle \\ &= \langle p(t), \max \{ f^s(p(t)) - f^d(p(t)), 0 \} \rangle, \end{aligned}$$

tzn. wartość niezaspokojonego popytu jest równa wartości niezrealizowanej podaży.

Niezrealizowana podaż (nadwyżka produkcji) (3) powiększa, a niezaspokojony popyt pomniejsza zapasy towarów zgodnie z równaniem (2). W momencie t transakcje kupna-sprzedaży są zawierane po cenach $p(t)$ bez względu na to czy towary pochodzą z bieżącej produkcji, czy z zapasów (tzn. cena towaru pochodzącego z zapasów jest taka sama jak cena towaru pochodzącego z bieżącej produkcji).

Przy standardowych założeniach, w gospodarce takiej istnieją ceny równowagi określone jednoznacznie z dokładnością do struktury. Dowód został przytoczony w artykule [3], twierdzenie 2. Jest ona też globalnie asymptotycznie stabilna (zob. twierdzenie 3 w tymże artykule). Gospodarka w równowadze eliminuje ponadto zapasy.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

- [1] McKenzie L.W. (2002), *Classical General Equilibrium Theory*, The MIT Press, Cambridge
- [2] Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AEP, Poznań
- [3] Panek E., (2011), „System Walrasa i zapasy”, „Przegląd Statystyczny” nr 3-4, 195-204
- [4] Takayama A., (1997), *Mathematical Economics*, Cambridge University Press

O PEWNEJ INTERPRETACJI SYSTEMU WALRASA Z ZAPASAMI

Streszczenie

Nawiązując do artykułu [3] zaproponowano odmienną jak się wydaje bliższą rzeczywistości ekonomicznej, interpretację modelu Walrasa z zapasami.

Słowa kluczowe: system Walrasa, popyt, podaż, równowaga konkurencyjna

A CERTAIN INTERPRETATION OF THE WALRAS'S SYSTEM AND STOCKS

A b s t r a c t

According to article [3], it has been proposed another interpretation of Walras's model and stocks, as it seems to be closer to economic reality.

Key words: Walras's economy, demand, supply, general equilibrium