

MICHAŁ ŁUKOWSKI

ZASTOSOWANIE MODELU DRZEWA TRÓJMIANOWEGO DO WYCENY OPCJI MENEDŻERSKICH

1. WSTĘP

Rozwój polskich przedsiębiorstw wymusza efektywne zarządzanie kapitałem ludzkim. Znakomicie wyszkolona kadra menedżerów i specjalistów jest w tym procesie rozwoju niezbędna. W celu zatrzymania oraz motywowania pracowników stosowane są bardzo wyrafinowane sposoby motywacji. Za jeden z tych sposobów można uznać programy menedżerskie oparte na opcjach. Rosnąca popularność tego typu programów skłania do wnikliwej analizy instrumentów finansowych, na których są oparte.

Najważniejszymi zagadnieniami w przypadku opcji menedżerskich są odpowiednia konstrukcja warunków oraz właściwa wycena skonstruowanego programu motywacyjnego. Konstrukcja programu opcyjnego związana jest z zastosowaniem wielu warunków ograniczających, które mają niejako stanowić o skuteczności stworzonego systemu wynagradzania. Skutkiem tego jest wykorzystywanie w tego typu programach opcji egzotycznych, ale również konieczność modyfikowania standardowych modeli wyceny stosowanych w przypadku opcji. Modyfikacje mają służyć możliwości uwzględnienia charakteru warunków, na które mogą składać się okresy wyłączone z możliwości wykonania opcji, ekstrema osiągnięte przez instrument bazowy, a także wskaźniki mówiące o możliwości wcześniejszego wykonania opcji przez menedżera. Warunki te muszą pozostawać w zgodzie z Międzynarodowym Standardem Sprawozdawczości Finansowej 2 [12]. Przedstawione w niniejszym artykule warunki w przekrojowy sposób pokazują charakter programów menedżerskich. Oczywiście, jest stosunkowo swobodna możliwość ich modyfikowania.

Modelami wyceny, które stosowane są w przypadku złożonych opcji, są modele wykorzystujące drzewa dwumianowe, trójmianowe, czy oparte na metodzie różnic skończonych. W artykule tym przedstawione jest podejście oparte na drzewie trójmianowym, które stanowi modyfikację rozwiązania zaproponowanego przez Hulla i White'a [8]. Na przykładzie tego modelu można w przystępny sposób przeprowadzić analizę opcji menedżerskich i sposób uwzględniania poszczególnych warunków w modelu wyceny. Zaproponowane modyfikacje stanowią rozszerzenie rozwiązania zaproponowanego przez Hulla i White'a polegające na rozwinięciu modelu z drzewa dwumianowego, do drzewa trójmianowego. Kolejna modyfikacja dotyczy wyników badań przeprowadzonych przez Huddarta i Langa [7] i polega na wprowadzeniu różnych wskaźników odejść dla okresu, w którym nabywane są uprawnienia (kiedy wykonanie opcji jest niemoż-

liwe) oraz dla okresu otwartego, kiedy przy spełnieniu dodatkowych warunków, opcja może zostać wykonana. W opracowanych modyfikacjach rozwinięty został również sposób obliczania wskaźnika odejść. Zamiast stałej stopy tego wskaźnika zaproponowana została postać funkcyjna, zależna od wartości akcji oraz czasu. Konstrukcja tej funkcji została oparta na rozwiązaniu zaproponowanym przez Musielę i Rutkowskiego [13]. Kolejna istotna modyfikacja polega na uchyleniu założenia, z którego wychodzili Hull i White, dotyczącego natychmiastowego wykonania opcji menedżerskiej w okresie otwartym, kiedy jest ona *in the money*. Stosowanie tego założenia powodowało zawyżanie wartości opcji i było sprzeczne z wynikami badań przeprowadzonych przez Carpenter [3] oraz Huddarta i Langa [7].

Przedstawiony w artykule model wyceny jest zgodny z założeniami MSSF 2 i pozwala na uwzględnienie wielu warunków ograniczających jednocześnie. Zostanie to zobrazowane zarówno w przypadku przedstawiania samej postaci modelu, jak i w przypadku przykładów obliczeniowych.

2. KONSTRUKCJA OPCJI MENEDŻERSKICH

Opcje menedżerskie, to opcje kupna wystawiane przez pracodawcę na akcje spółki, której program dotyczy, a nabywane przez pracownika, któremu program jest proponowany. Z uwagi na odmienny profil wypłaty od standardowych opcji kupna, będący wynikiem uwzględnienia warunków, od których może być uzależnione wykonanie opcji, podstawę konstrukcji opcji menedżerskich stanowią głównie opcje egzotyczne. Zyskuje się dzięki temu możliwość uwzględnienia w modelu wyceny ekstremów instrumentu bazowego, czy okresów wyłączonych z możliwości wykonania opcji.

Z uwagi na przedmiot niniejszego artykułu, interesująca jest grupa opcji wyodrębniona w książce pod redakcją Israela Nelkena przez Michaela Onga [16] – opcje egzotyczne uwzględniające stopień uwarunkowania ceny opcji od przebiegu ceny instrumentu bazowego (tzw. *path-dependence*).

Możliwość wykonania opcji menedżerskich zależy od czynników, które można podzielić na warunki rynkowe oraz nierynkowe przyznania uprawnień, a także warunki świadczenia usług. Warunki nabycia ustalone w dniu przyznania uprawnień (*grant date*) muszą zostać spełnione, aby możliwe było skorzystanie z programu przez osobę uprawnioną.

Warunki, które muszą zostać spełnione, są związane z działalnością gospodarczą jednostki, ale również bezpośrednio z osobą, której program motywacyjny jest oferowany. Warunki dotyczące osoby, nazywane są warunkami świadczenia usług i polegają na określeniu czasu, przez który pracownik musi świadczyć usługi na rzecz pracodawcy. Pozostałe warunki dzielą się na warunki rynkowe i warunki nierynkowe. Za rynkowe, uważa się te warunki, które leżą poza bezpośrednią kontrolą jednostki. Zalicza się do nich jeden z podstawowych warunków, czyli osiągnięcie przez akcje określonej ceny. Jak pokazują badania Lakonishoka i Lee [11], Seyhuna [19], [20], Narayanana i Seyhuna [14], pomimo interpretowania tych warunków jako leżących poza bezpośrednią kontrolą zainteresowanych programem osób, dzięki dostępowi do informacji niedostępnych dla wszystkich inwestorów, kadra zarządzająca jest często w stanie

przewidywać przyszłe ruchy cen akcji. Co więcej, w opracowaniu Herona i Liego [6], przedstawione zostały wyniki badań dotyczących nadnaturalnie niskiego poziomu cen akcji bezpośrednio przed wykonaniem opcji i nadnaturalnie wysokiego poziomu cen po ich wykonaniu. Wskazuje to jednoznacznie na możliwość wpływania menedżerów, w których interesie leży wykonanie opcji menedżerskich, na kształtowanie się cen akcji, szczególnie w okresie wykonywania opcji. Problem ten, poruszony w pracy Herona i Liego [6], wynika z nieuczciwej działalności menedżerów i tzw. kreatywnej księgowości zmierzającej do zwiększenia profitów osób objętych programem motywacyjnym. Poza osiągnięciem określonej ceny akcji do warunków rynkowych należy także osiągnięcie wewnętrznej wartości opcji (np. w przypadku opcji barierowej z barierą wejścia w dół i ceną wykonania w górę).

Za warunki nierynkowe uważa się te, które mogą być kontrolowane bezpośrednio przez jednostkę. Można do nich zaliczyć wszystkie sprawy związane z wewnętrzną działalnością firmy, a ich ustalenie może mieć dowolny charakter. Przy wycenie, spełnienie tych warunków przyjmować będzie postać zmiennej binarnej i w ten sposób decydować, czy opcja może zostać wykonana. W opracowaniu Preussa i Ślusarskiego [17] wskazano także na osiągnięcie celów indywidualnych, co w praktyce oznacza, że wszystko to, na co zainteresowana programem osoba ma wpływ, co nie jest poza jej wyraźną kontrolą, może być zaliczone do warunków nierynkowych nabywania uprawnień.

Ważnym elementem konstrukcyjnym opcji menedżerskich jest brak możliwości przeniesienia praw przysługujących osobie uprawnionej na osoby trzecie oraz ograniczenie możliwości wpływania menedżerów na wynik finansowy poprzez wyłączenie możliwości wykonania opcji w okresie przypadającym na publikację sprawozdań finansowych, co prowadzi do modyfikacji okresu wykonania opcji. Specyfikacja opcji menedżerskich powinna w swojej konstrukcji uwzględniać także prowadzoną przez przedsiębiorstwo politykę dywidend, która mogłaby prowadzić do wykorzystywania spadku cen akcji do osiągnięcia dodatkowych zysków wynikających z programu motywacyjnego.

Programy menedżerskie, ze względu na sposób ich rozliczania, można podzielić na rozliczane w środkach pieniężnych [6] oraz rozliczane w instrumentach kapitałowych. Rozliczanie w instrumentach kapitałowych wiąże się dla przedsiębiorstwa z koniecznością emisji akcji bądź skupowaniem istniejących akcji. Zgodnie z MSSF 2 odmienny jest także sposób ujmowania tych programów – jako zobowiązania, dług lub kapitał własny [9]. Ze względu na obszerność dyrektywy nie zostanie ona omówiona szczegółowo w niniejszym artykule. Warto jednak nadmienić, że dokładna analiza standardu rachunkowości stanowi niepodważalnie punkt wyjścia przy konstruowaniu modeli wyceny.

Opcje menedżerskie rozliczane w instrumentach kapitałowych są ujmowane natychmiast, jeżeli żadne dodatkowe warunki nie muszą zostać spełnione. W przypadku występowania takich warunków, transakcja musi być ujmowana w sprawozdawczości finansowej przez cały okres spełniania tych warunków. Wycena programu oparta jest w takim przypadku na wartości godziwej instrumentów, na które opcje są wystawione, na dzień przyznania, co w obliczu konieczności uwzględnienia warunków rynkowych i terminów danego programu oraz braku możliwości zdobycia adekwatnych danych rynkowych, prowadzi do wykorzystania teoretycznych modeli wyceny. Po ustaleniu war-

tości godziwej, wpływ na kontrakt mają już tylko warunki nierynkowe, które wpływają na liczbę instrumentów, których dany program będzie dotyczył. Programy rozliczane w środkach pieniężnych ujmowane są jako koszt i wyceniane na podstawie wartości godziwej zobowiązań na każdy dzień sprawozdawczy, wpływając na wyniki sprawozdawcze przedsiębiorstwa w danym okresie rozliczeniowym. Programy rozliczane w środkach pieniężnych posiadają wiele cech wspólnych z programami *Phantom Share Plan*, dających pracownikowi prawo otrzymania premii przy wzroście ceny akcji.

Poszukiwanie modeli wyceny uwzględniających charakterystykę opcji menedżerskich jest istotne ze względu na fakt, że standardowe modele wyceny opcji nie uwzględniają takich właściwości opcji menedżerskich [8], jak: okres nabywania uprawnień, utrata możliwości wykonania opcji w przypadku rezygnacji pracownika z zatrudnienia w okresie nabywania uprawnień, utrata możliwości wykonania opcji *out-of-money*, faktu, że pracownikowi nie wolno zbywać opcji menedżerskich oraz występowanie efektu rozmycia w przypadku emisji nowych akcji w celu rozliczenia programu menedżerskiego. Poza tym, jak w swojej pracy dowodzi Rubinstein [18], wartości otrzymywane przy wykorzystaniu standardowych modeli wyceny prowadzą do przeszacowania wartości opcji.

Właściwe określenie wartości godziwej opcji menedżerskich jest istotne nie tylko z punktu widzenia wymogów rachunkowości, ale również z punktu widzenia oczekiwań pracowników i udziałowców. Rozbieżność między wartością opcji dla przedsiębiorstwa i otrzymującego opcję wynika z faktu, że pracownik jest pozbawiony możliwości zbycia opcji lub jej zabezpieczenia, gdyż krótkie pozycje w opcjach firmy są niedozwolone [4]. Firma natomiast może zbyć swoje zobowiązanie lub zabezpieczyć swoją pozycję. Wartość opcji zależy jednak w dużej mierze od polityki wykonywania opcji przez menedżera, którego zachowanie, dzięki posiadaniu danych niedostępnych dla rynku, może różnić się od optymalnego zachowania inwestorów.

Sposób wyceny opcji menedżerskich w dużej mierze zależy od warunków, którymi program menedżerski został obarczony. W myśl MSSF 2, przy wycenie wartości godziwej opcji menedżerskich należy uwzględnić wszystkie warunki rynkowe, które wzięłyby pod uwagę dobrze poinformowane strony tej transakcji, a wycena powinna być prowadzona z punktu widzenia przedsiębiorstwa. Na wartość godziwą nie mają natomiast wpływu warunki nierynkowe, stąd nie bierze się ich pod uwagę przy wycenie (powodują one jedynie korektę liczby instrumentów objętych programem), a w przypadku ich niespełnienia, odwraca się rozpoznane koszty związane z programem motywacyjnym.

Jednym z czynników, który różni opcje menedżerskie od innych opcji i stanowi o konieczności modyfikowania modeli wyceny, jest wskaźnik odejść. Jest to obserwowalna wielkość, będąca stopą rezygnacji pracowników z zatrudnienia w danym przedsiębiorstwie. Istotne jest zarówno, kiedy dany pracownik objęty programem motywacyjnym rezygnuje z zatrudnienia (w okresie nabywania uprawnień, czy po jego upływie) oraz jakie stanowisko zajmuje. Jak w swoich badaniach przedstawili Huddart i Lang [7], miejsce w pracowniczej hierarchii ma wpływ na wysokość wskaźnika odejść. Pracownicy wyższych szczebli dłużej wstrzymują się od wykonania opcji, co związane jest z poziomem zamożności [7] oraz płynnością finansową [9]. Zbliżając wartość opcji menedżerskich do rzeczywistości można uznać, że wskaźnik odejść jest

zależny od czasu pozostającego do wygaśnięcia opcji oraz wartości akcji, na których dany program został oparty [15], zastępując tym samym stałą wartość tego wskaźnika w czasie.

Na wycenę programów motywacyjnych istotny wpływ ma konstrukcja opcji związana zarówno z czasem jej życia, jak i okresem nabywania uprawnień. Średni czas trwania programów motywacyjnych wynosi od ośmiu do dziesięciu lat [7], [9] i jest ściśle związany z celem, któremu program motywacyjny ma służyć. Zbyt długi okres, ze względu na dużą niepewność związaną z kształtowaniem procesów gospodarczych, może nie stanowić odpowiedniej motywacji. Zdecydowana większość programów daje możliwość wykonania opcji przed terminem wygaśnięcia (po okresie nabywania uprawnień). Jak pokazują badania Carpenter [3], menedżerowie korzystają z tej możliwości, gdyż średni czas wykonania opcji wynosi 5,83 roku, przy czym wszystkie badane firmy określiły czas trwania programów na 10 lat, natomiast w przypadku badań Huddarta i Langa [7] średni czas wykonania opcji wynosił 3,4 roku. Z punktu widzenia zarówno motywacyjnego, jak i modeli wyceny, istotny jest również okres nabywania uprawnień (z badań Carpenter [3] – 1,96 roku). W okresie tym konieczne jest spełnienie wszystkich ustalonych warunków, aby wykonanie opcji stało się możliwe w okresie otwartym (do momentu zapadalności). Uwzględnienie okresu nabywania uprawnień w procesie wyceny zbliża postać opcji menedżerskich do opcji bermudzkich.

Możliwość wcześniejszego wykonania opcji menedżerskich prowadzi do upodabniania ich do opcji barierowych [8]. Wysokość bariery może zostać narzucona przez wystawiającego opcję lub obliczona na podstawie historycznych danych dotyczących średniej ceny akcji w momencie wcześniejszego wykonywania opcji przez menedżerów. Historyczne dane powinny być dobrane do grupy pracowników, których program dotyczy i nie powinny obejmować okresu bezpośrednio po okresie nabywania uprawnień. W swoich badaniach nad wielkością tego wskaźnika, Huddart i Lang [7], rozpatrzyli przypadki pięćdziesięciu tysięcy pracowników z ośmiu firm w latach 1982-1994 i otrzymali wysokość bariery (wskaźnika wielokrotności) na poziomie 2,2 razy wyższym od ceny wykonania. Natomiast w badaniach Carpenter [3] dotyczących najwyższych rangą menedżerów z czterdziestu firm w latach 1979-1994, obliczono ten wskaźnik na poziomie 2,8. W przypadku kiedy ograniczenie nie zostało narzucone przez emitenta, oszacowanie wielkości współczynnika wielokrotności, jest niejako informacją dla przedsiębiorstwa, o polityce wykonywania opcji przez menedżerów.

Czynnikiem, którego właściwe oszacowanie ma znaczący wpływ na wycenę wszystkich opcji, w tym także opcji menedżerskich, jest współczynnik zmienności. Szacowanie zmienności jest bardzo szerokim zagadnieniem, wobec czego, ze względu na charakter niniejszego opracowania nie zostanie przedstawione. Szacując współczynniki zmienności na potrzeby badań wykorzystano modele z rodziny GARCH.

Przy wycenie programów menedżerskich warto zastanowić się nad efektem rozmycia, którego wpływ został w przedstawianym modelu wyceny zignorowany, na podstawie tezy wysuniętej przez Hulla i White'a [8], mówiącej, że wielkość emisji nowych akcji jest mała w stosunku do wszystkich wyemitowanych przez spółkę akcji.

3. MODEL WYKORZYSTUJĄCY DRZEWO TRÓJMIANOWE

Zadanie stworzenia modelu wyceny opcji menedżerskich pozwalającego na jednoczesne uwzględnienie zarówno wskaźnika odejść, jak i okresów wyłączonych z możliwości wykonania opcji, sprowadza problem do wyceny opcji bermudzkiej uwzględniającej w swojej konstrukcji barierę. Do wyceny opcji barierowych oraz bermudzkich wygodnym narzędziem jest model drzewa trójmianowego. Jest on znacznie prostszy w implementacji od modelu różnic skończonych, a przedstawienie jego konstrukcji pozwala na wyróżnienie poszczególnych modyfikacji wynikających z uwzględnianych w wycenie warunków programu w przystępny sposób.

Model wyceny opcji menedżerskich zaproponowany przez Hulla i White'a oparty został na modelu wyceny za pomocą drzewa dwumianowego. Jak jednak zaznaczają sami autorzy, do wyceny opcji (w tym opcji barierowych, do których w tym punkcie sprowadzą się opcje menedżerskie) znacznie efektywniejsze jest wykorzystanie drzewa trójmianowego. Dzięki zagęszczeniu poszczególnych gałęzi drzewa otrzymujemy węzły, w których wartości akcji odpowiadają określonym barierom. Dlatego zmodyfikowane zostało podejście Hulla i White'a, poprzez zastosowanie modelu drzewa trójmianowego.

Model omawiany w tym punkcie w przejrzysty sposób bierze pod uwagę możliwość oraz politykę wcześniejszego wykonania opcji (po okresie nabywania uprawnień) przez menedżera. Wcześniejsze wykonanie opcji wykorzystuje oszacowaną w punkcie dotyczącym konstrukcji wskaźnika odejść wielkość zarówno dla okresu nabywania uprawnień, jak i dla okresu otwartego. Postać jaką przyjmuje przedstawia wzór:

$$e = \ln(1 + u), \quad (1.1)$$

gdzie:

e – wskaźnik odejść stosowany w modelu,

u – wskaźnik odejść oszacowany na podstawie badań empirycznych.

W prezentowanym w artykule modelu zdecydowano się na modyfikację założeń poczynionych przez Hulla i White'a zakładających wielkość wskaźnika e na poziomie 0 w okresie nabywania uprawnień. Powodem wprowadzenia dwóch różnych wartości wskaźnika odejść są wyniki badań przeprowadzonych przez Huddarta i Langa [7] mówiące o odmiennym zachowaniu pracowników w okresie otwartym i zamkniętym. Poza tym, zgodnie z opracowaniem Noreena i Wolfsona [15], zmienność wskaźnika odejść w czasie, skłania do przedstawienia go za pomocą funkcji czasu i wartości akcji, zamiast, jak miało to miejsce w modelu Hulla i White'a, za pomocą stałej wartości.

Polityka wcześniejszego wykonywania opcji jest związana z wcześniej omawianym współczynnikiem wielokrotności, oznaczonym w przypadku tego opracowania przez M . Współczynnik ten ogranicza możliwość wykonania opcji przez ich posiadaczy (gdy została narzucona przez emitenta np. w postaci bariery) w okresie otwartym do momentu wygaśnięcia opcji (jednak nie w samym momencie wygasania opcji). Stanowi on dodatkowe zabezpieczenie przed wykonaniem opcji, przez co zwiększa skuteczność przywiązania menedżera do pracodawcy w okresie trwania programu

motywacyjnego. Z perspektywy analizy, istotny jest wpływ tego czynnika na sam sposób wyceny opcji menedżerskich, dlatego sposób oszacowania wartości tego parametru nie zostanie przedstawiony. Otóż, wprowadzenie go do moich rozważań przybliżyła postać opcji menedżerskiej do opcji barierowej. Niezależnie od tego, czy bariera została określona przez emitującego opcję, czy pozostaje tylko obserwacją polityki wykonań opcji stosowaną przez menedżerów, warto wziąć pod uwagę wpływ tego parametru na wartość opcji.

Wykorzystanie wskaźnika wielokrotności powoduje także ominięcie nieprawidłowości wyceny za pomocą modeli, w których za dane wejściowe należy uznać maksymalny okres, jaki może minąć od daty przyznania do terminu wygaśnięcia (określone w standardzie MSSF 2 jako oczekiwany czas życia opcji). Jest to związane z określeniem o ile wartość ceny akcji musi przekraczać cenę wykonania, aby możliwe było wcześniejsze wykonanie opcji [8]. Dzięki wykorzystaniu wskaźnika wielokrotności ominięta zostaje konieczność oszacowania oczekiwanej długości życia opcji (w myśl standardu MSSF 2).

4. POSTAĆ MODELU

Zmodyfikowanie oryginalnego modelu do postaci drzewa trójmianowego spowodowało konieczność zmiany wszystkich formuł wykorzystywanych w modelu wyjściowym. Ciekawym rozwiązaniem byłoby oparcie modelu na implikowanym drzewie trójmianowym zaproponowanym przez Dermana i Kaniego [5], jednak ze względu na ograniczoną dostępność danych związanych z cenami opcji menedżerskich, niniejszy artykuł zostanie oparty na drzewie trójmianowym.

Zasady wyznaczania wartości opcji w każdym węźle [8] określają możliwość wykonania opcji tylko po okresie nabywania uprawnień i tylko w przypadku, jeżeli cena akcji przekracza cenę wykonania M razy (gdzie $M > 0$). Poza tym istnieje prawdopodobieństwo, że opcja zostanie utracona w czasie okresu nabywania uprawnień i jest ono równe $e\delta t$ dla każdego krótkiego okresu pomiędzy poszczególnymi węzłami w drzewie (gdzie: $e = \ln(1 + u)$, natomiast δt oznacza odstęp czasowy między kolejnymi węzłami) oraz istnieje prawdopodobieństwo, że opcja zostanie utracona w każdym małym czasie δt i wynosi ono $e\delta t$.

Zgodnie z założeniami oryginalnego modelu, jeżeli opcja ma zostać utracona po okresie nabywania uprawnień, to jeżeli jest *out of the money*, to faktycznie zostaje utracona, natomiast jeżeli jest *in the money*, to zostaje natychmiast wykonana. W przypadku przedstawionych badań postanowiono zmodyfikować to podejście. Dlatego kiedy opcja jest *in the money* oraz jesteśmy w fazie okresu otwartego, to pomimo możliwości wykonania opcji, nie jest to konieczne. Dlatego zaproponowany przez Hulla i White'a został zmodyfikowany. Modyfikacja polegała na zdyskontowaniu wartości otrzymywanych ze wzoru 1.6.

Wartości akcji są w każdym następnym węźle drzewa:

– w przypadku wzrostu ceny akcji w następnym węźle równe S_u , gdzie $S_u = S_0u$,
 $u = e^{\sigma\sqrt{2\delta t}}$,

– w przypadku spadku ceny wartość akcji w węźle równa S_d , gdzie $S_d = S_0d$,
 $d = e^{-\sigma\sqrt{2\delta t}}$,
 – w przypadku pozostania ceny na dotychczasowym poziomie równa S_m , gdzie
 $S_m = S_0m$, $m = 1$,
 gdzie przez S_0 oznaczyłem wartość akcji w węźle wyjściowym.

Prawdopodobieństwo zmiany ceny opcji w każdym węźle wynosi:

– prawdopodobieństwo, że cena opcji wzrośnie, wynosi w każdym węźle:

$$p_u = \left(\frac{e^{r\delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t/2}}} \right)^2, \quad (1.2)$$

– prawdopodobieństwo, że cena opcji spadnie, wynosi w każdym węźle:

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\delta t/2}} - e^{r\delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t/2}}} \right)^2, \quad (1.3)$$

– prawdopodobieństwo, że cena pozostanie na niezmiennym poziomie wynosi:

$$p_m = 1 - p_u - p_d, \quad (1.4)$$

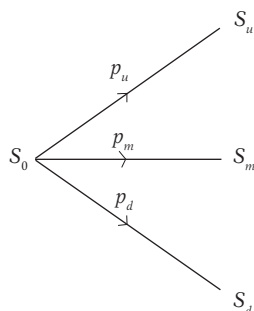
gdzie:

σ – współczynnik zmienności ceny akcji,

r – stopa wolna od ryzyka,

δt – długość kroku czasowego (odstęp czasowy między węzłami).

Proces budowania trójmianowego drzewa dla ceny akcji obrazuje rysunek 1.1:



Rysunek 1.1 Schematyczne przedstawienie drzewa trójmianowego ceny akcji

Konstrukcja drzewa trójmianowego dla ceny opcji, w przypadku gdy rozważamy N kroków o długości δt każdy, wygląda przy wykorzystaniu indukcji wstecznej dla konstrukcji opartej na drzewie dwumianowym (na podstawie artykułu Hulla i White'a [8]) następująco (z wprowadzonymi odpowiednimi zmianami (wzory 1.6-1.9).

Wartość opcji w węzłach końcowych:

$$f_{N,j} = \max(S_{N,j} - K, 0), \quad (1.5)$$

gdzie:

$f_{N,j}$ – wartość opcji w ostatnim węźle drzewa,

$S_{N,j}$ – wartość akcji w ostatnim węźle drzewa (odpowiadającym węzłowi opcji),

K – cena wykonania opcji.

W przedziale czasowym od momentu przyznania opcji do przedostatniego węzła $0 \leq i \leq N - 1$ wartość opcji wynosi:

– w przypadku kiedy minął okres nabywania uprawnień:

dla $i\delta t > \nu$ i $S_{i,j} \geq KM$ opcja przyjmuje wartość:

$$f_{i,j} = S_{i,j} - K, \quad (1.6)$$

dla $i\delta t > \nu$ i $S_{i,j} < KM$ opcja przyjmuje wartość:

$$f_{i,j} = (1 - e\delta t)e^{-r\delta t} [p_u f_{i+1,j+1} + p_m f_{i+1,j} + p_d f_{i+1,j-1}] + e\delta t \max(S_{i,j} - K, 0), \quad (1.7)$$

– w przypadku kiedy okres nabywania uprawnień nie minął:

$i\delta t < \nu$ opcja przyjmuje wartość:

$$f_{i,j} = (1 - e\delta t)e^{-r\delta t} [p_u f_{i+1,j+1} + p_m f_{i+1,j} + p_d f_{i+1,j-1}], \quad (1.8)$$

– wartość opcji w węźle początkowym drzewa:

$$f_{00}. \quad (1.9)$$

gdzie:

i – numer kroku czasowego,

ν – okres nabywania uprawnień,

δt – długość kroku czasowego,

$S_{i,j}$ – wartość akcji w węźle i,j ,

K – cena wykonania opcji,

M – wskaźnik wielokrotności,

$f_{i,j}$ – wartość opcji w węźle i,j ,

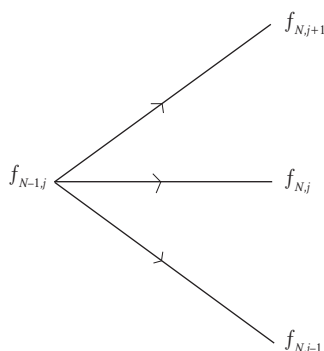
$f_{i+1,j}$ – wartość opcji w węźle $i + 1$, dla wartości ceny opcji na niezmiennym poziomie,

$f_{i+1,j+1}$ – wartość opcji w węźle $i + 1$, dla wartości ceny opcji w przypadku wzrostu,

$f_{i+1,j-1}$ – wartość opcji w węźle $i + 1$, dla wartości ceny opcji w przypadku spadku.

Istotną w tym momencie jest wprowadzona modyfikacja wzoru (1.6). Otóż postać zaproponowana przez Hulla i White'a nie uwzględnia dyskontowania wartości ze wzoru (1.6), co w mojej ocenie prowadzi do zawyżania wartości opcji. Jako, że każdy węzeł drzewa niejako dyskontuje wartości pobierane z poprzedniego węzła, dlatego w niniejszym opracowaniu zdecydowano się na wprowadzenie do wzoru (1.6) członu następującej postaci $e^{-r\delta t^*m}$, przez który wartość (1.6) jest w każdym węźle przemnożona. W członie tym występuje wartość m , która wskazuje przez ile okresów dana wartość powinna zostać przemnożona (czyli o ile okresów od ostatniego węzła drzewa powinna dana wielkość zostać zdyskontowana). Dla węzła N wartość m wynosi 0, dla węzła $N-1$ wartość ta wynosi 1, dla węzła $N-2$ wartość ta wynosi 2, itd. W ten sposób dyskontowane są wszystkie wartości opcji w węzłach, w których wykonanie opcji jest możliwe (czego moim zdaniem, w modelu wyjściowym niesłusznie brakowało). Uwzględnienie członów tej postaci ($e^{-r\delta t^*m}$) wynika z możliwości wykonania opcji w danym momencie (okres otwarty, cena akcji wyższa od ceny wykonania przemnożonej przez wskaźnik odejścia), jednak pracownik w zależności od swojej decyzji, może nie rezygnować z programu. W takim wypadku węzeł ten nie będzie ostatnim węzłem wyceny i stąd za zasadne uważam zdyskontowanie występującej w nim wartości opcji. Przez wprowadzoną modyfikację uchylone zostało założenie modelu wyjściowego polegające na konieczności natychmiastowego wykonania opcji, kiedy jest to możliwe.

Proces budowania trójmianowego drzewa dla wartości opcji obrazuje rysunek 1.2:



Rysunek 1.2 Schematyczne przedstawienie tworzenia drzewa trójmianowego ceny opcji

Rozszerzenie modelu zaproponowanego przez Hulla i White'a o metodę opartą na drzewie trójmianowym pozwala na zagęszczenie ilości węzłów, co w efekcie prowadzi do wzrostu prawdopodobieństwa trafienia na cenę akcji odpowiadającą ustalonej w programie barierze.

5. KONSTRUKCJA WSKAŹNIKA ODEJŚĆ

Konstrukcja wskaźnika odejść oparta została na publikacji Musieli i Rutkowskiego [13]. Funkcja $\lambda(S, t)$ interpretowana jest jako roczna stopa wskaźnika odejść spo-

wodowanych przedterminowym (przed terminem wygaśnięcia, po okresie nabywania uprawnień) wykonaniem opcji, które w momencie wykonywania są *in the money*. Parametr ten, jak zauważa Graeme West [21], może zostać oszacowany na podstawie danych historycznych dotyczących danego przedsiębiorstwa. Jednak w przypadku przeprowadzonego badania, możliwość pozyskania takich danych okazała się bardzo ograniczona. Poza tym celem niniejszego artykułu było przedstawienie powyższego parametru za pomocą funkcji kilku zmiennych. Stąd na podstawie opracowań Ayache [1], [2] czynniki λ przedstawione zostaną jako funkcje zależne od wartości akcji oraz czasu.

Własności funkcji $\lambda(S, t)$ [21]:

- $\lambda(S, t) = 0$, dla $S < K$ oraz jeżeli jest to okres zamknięty,
- $\lambda(S, t)$ rośnie wraz ze wzrostem ceny akcji S oraz czasu t oraz spadkiem współczynnika zmienności σ ,
- w okresach w których funkcja $\lambda(S, t) = 0$, funkcja $v(S, t) \neq 0$, co pozwala stwierdzić, że są to funkcje wzajemnie komplementarne.

W celu oszacowania funkcji $\lambda(S, t)$ wykorzystana zostanie publikacja Musieli i Rutkowskiego [13]. Autorzy zaproponowali, aby prawdopodobieństwo wcześniejszego wykonania opcji, które w mojej pracy będzie interpretowane jako wskaźnik odejścia, szacować na podstawie opcji barierowej. Bariera jest przy tym ustalana na podstawie danych historycznych dotyczących odejść – jest to wartość opisywana w badaniach Carpenter [3] oraz Huddarta i Langa [7], a także wspomniany przy okazji omawiania modelu Hulla i White'a współczynnik wielokrotności. Wzór zaproponowany przez Musielę i Rutkowskiego (1.10) odnosi się do okresu otwartego, w którym cena akcji jest wyższa od ceny wykonania opcji ($S > K$), czyli opcja jest *in the money* i możliwe jest jej wykonanie.

$$P(S, t) = N\left(\frac{-\ln\frac{B}{S} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) - \left(\frac{K}{S}\right)^{\frac{2(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma^2}} N\left(\frac{-\ln\frac{B}{S} + 2\ln\frac{K}{S} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right), \quad (1.10)$$

gdzie:

B – oznacza górną barierę, która musi zostać przekroczona, aby wykonanie opcji było możliwe (bądź jeżeli taka bariera nie została w programie ustalona, oznacza wysokość ceny akcji jaka była osiągana w momencie wykonania opcji przez pracowników o podobnej pozycji w hierarchii przedsiębiorstwa w przeszłości), wartość ta ustalana jest na podstawie danych historycznych.

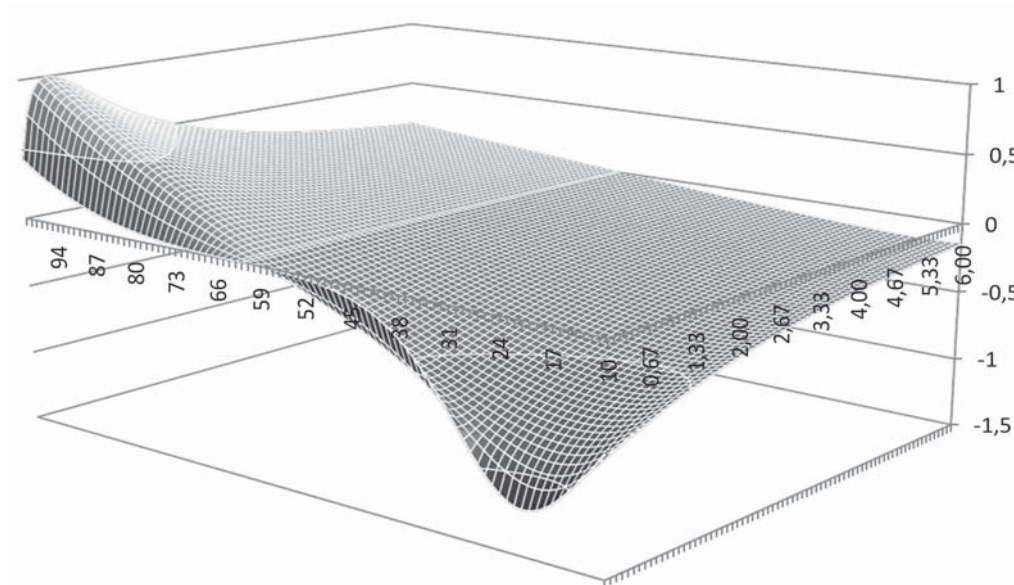
Jednak w celu oszacowania wskaźnika odejść, w badaniach wykorzystywane zostanie pewne przekształcenie tej funkcji. Wzór (1.10) $P(S, t)$ jest funkcją określającą stopę wczesnego wykonania opcji, natomiast w moich badaniach będzie potrzebne oszacowanie funkcji $\lambda(S, t)$. W tym celu wykorzystany zostanie wzór (1.11) [21].

$$e^{-\lambda(S,t)(T-t)} = 1 - P(S,t) \quad (1.11)$$

W celu oszacowania funkcji $\lambda(S, t)$ potrzebne jest przekształcenie wzoru (1.11). Wzór po przekształceniu przedstawiony jest jako wzór (1.12).

$$\lambda(S,t)(T-t) = \ln\left(\frac{1}{1 - P(S,t)}\right) \quad (1.12)$$

Tak opracowana funkcja $\lambda(S, t)$ wykorzystana zostanie w badaniach. Przy tworzeniu funkcji prawdopodobieństwa użyto parametru B , który pozwolił na włączenie do rozważań bariery ograniczającej możliwość wykonania opcji. Potrzebne jest jednak wprowadzenie do modelu wskaźnika odejść, obliczonego na podstawie funkcji prawdopodobieństwa zaproponowanej w publikacji Musieli i Rutkowskiego [13]. Ponieważ funkcja $\lambda(S,t)$ przyjmuje duże wartości, dlatego zdecydowano się na normalizację tej zmiennej względem maksimum, poprzez podzielenie wszystkich otrzymanych wartości przez maksymalną otrzymaną wartość tego wskaźnika. Wykres funkcji $\lambda(S, t)$ opracowany dla danych z badanego przeze mnie programu dla spółki ComArch S.A. przedstawiony został na wykresie 1.3.



Rysunek 1.3 Znormalizowane wartości funkcji $\lambda(S, t)$

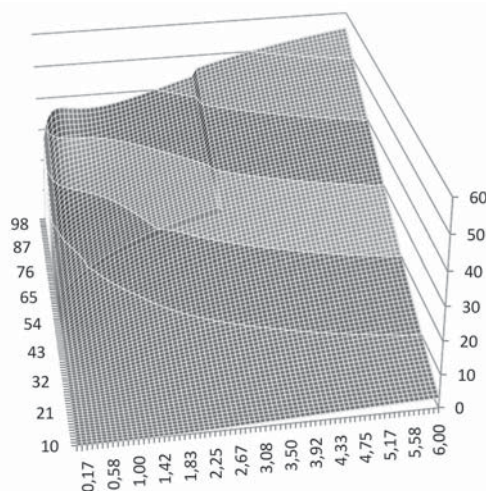
6. PRZYKŁAD

Praktyczne wykorzystanie zaprezentowanego modelu wyceny opcji menedżerskich sporządzone zostało dla akcji spółki ComArch S.A. Skonstruowany program menedżer-

ski trwa od 11.02.2004 roku do 11.02.2010 roku. Okres nabywania uprawnień wynosi 3 lata. Wskaźnik wielokrotności z uwagi na stosunkowo wysoką zmienność ceny akcji przy cenie wykonania opcji (62,5 zł) oraz cenie akcji w 2004 roku (46,8 zł) ustalono na poziomie 2,2 ceny wykonania opcji zgodnie z badaniami Huddarta i Langa [7], gdyż program z założenia obejmuje pracowników, a nie tylko najwyższych rangą menedżerów. Cenę wykonania ustalono na podstawie obserwacji kształtowania się ceny akcji spółki ComArch S.A. w okresie od 10.03.1999 roku do 11.02.2004 roku. Stopa wolna od ryzyka na podstawie oprocentowania 52-tygodniowych bonów skarbowych wynosi w prezentowanych modelach 3,85%. Stopę odejścia w okresie otwartym ustalono na poziomie 5%. Jako stopę odejścia w okresie otwartym wykorzystano funkcyjną postać wskaźnika odejść (która jest w poszczególnych punktach przekształcana zgodnie ze wzorem 1.1). Najważniejsze parametry obliczone w przypadku konstruowania drzewa trójmianowego przyjęły następujące wartości: $p_u = 0,210664$, $p_d = 0,292701$, $p_m = 0,496635$.

Na podstawie modelu drzewa trójmianowego i przedstawionych danych wejściowych obliczono cenę opcji w momencie przyznania na poziomie 22,1877 zł (przy cenie akcji spółki ComArch S.A. wynoszącej 11.02.2004 roku 46,8 zł). Wykorzystując jawną metodę różnic skończonych (stworzoną na podstawie artykułu Westa [21]) dla dokładnie takich samych danych wejściowych oraz warunków programu, otrzymana wartość jest równa tej z modelu drzewa trójmianowego. Stanowi to o poprawności i dużej dokładności zaprezentowanego modelu.

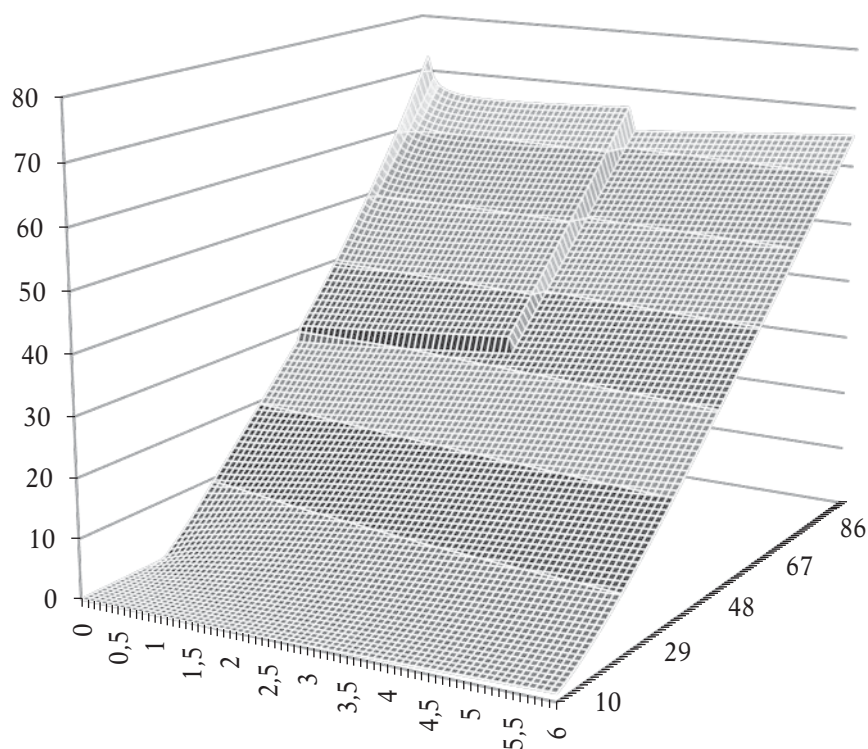
Na wykresie 1.4 przedstawione zostały badania symulacyjne ceny opcji menedżerskiej dla spółki ComArch S.A. Oś czasu przedstawia liczbę lat do wygaśnięcia opcji. Charakterystyczne załamanie powierzchni spowodowane jest uwzględnieniem wskaźnika odejść w okresie otwartym (między 3 a 6 rokiem trwania programu motywacyjnego) dla ceny akcji umożliwiającej jej wykonanie w związku z ustalonym wskaźnikiem wielokrotności (2,2).



Rysunek 1.4 Symulacja wartości opcji dla spółki ComArch S.A.

Drugi przykład obliczeniowy przedstawia stworzony dla spółki PKN Orlen S.A. program motywacyjny przeznaczony dla najwyższych rangą menedżerów. Program obejmuje okres od 29.11.2002 roku do 28.11.2008 roku. Okres nabywania uprawnień ustalony został jako 3 lata, natomiast wskaźnik wielokrotności, zgodnie z badaniami Carpenter wynosi 2,8 (z uwagi na fakt objęcia programem tylko najwyższych rangą menedżerów). Cena akcji w momencie przyznania wynosi 17,15 zł, natomiast cena wykonania – 25 zł. Parametry wykorzystywane przy tworzeniu drzewa trójmianowego przyjęły wartości: $p_u = 0,239137$, $p_d = 0,261104$, $p_m = 0,499759$.

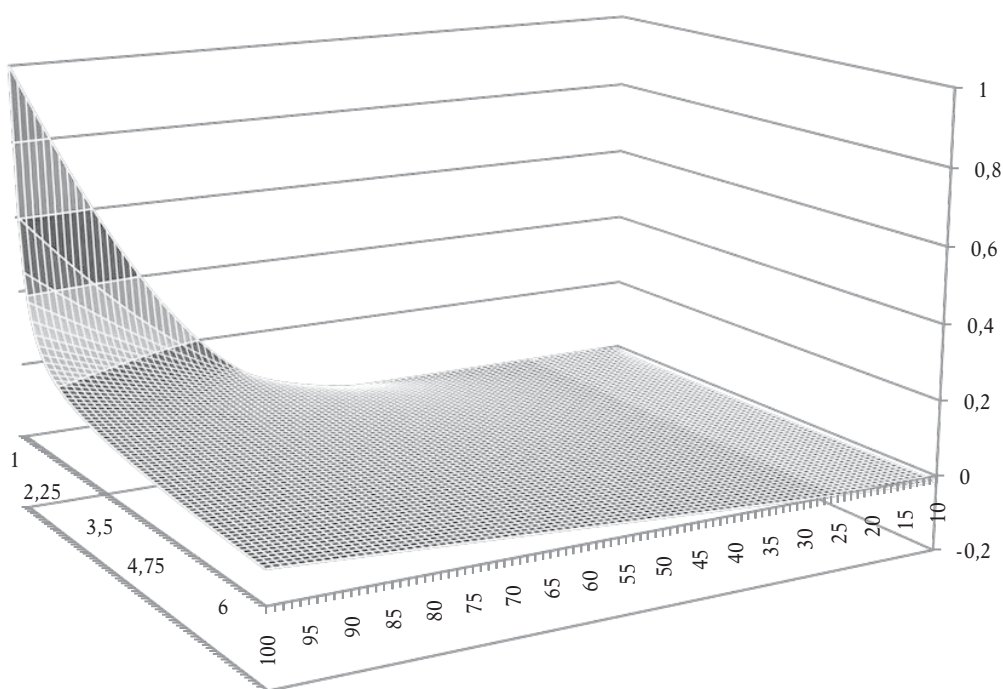
Wykorzystując zaprezentowany model drzewa trójmianowego dla skonstruowanego na podstawie powyższych danych programu menedżerskiego dla spółki PKN Orlen S.A. obliczono cenę opcji w momencie przyznania na poziomie 4,0122 zł (przy cenie akcji w tym momencie wynoszącej 17,15 zł). Rysunek 1.5 przedstawia znormalizowane wartości funkcji $\lambda(S, t)$, czyli postaci funkcyjnej wskaźnika odejść dla analizowanego programu spółki PKN Orlen S.A.



Rysunek 1.5 Znormalizowane wartości funkcji $\lambda(S, t)$ dla programu spółki PKN Orlen S.A.

Badania symulacyjne wartości opcji dla programu menedżerskiego dla spółki PKN Orlen S.A. przedstawione zostały na rysunku 1.6. W przypadku tego programu widoczne załamanie wartości opcji spowodowane jest również uwzględnieniem w okresie otwar-

tym dla odpowiedniej wartości akcji wskaźnika odejść. W przypadku przedstawionego na rysunku 1.6 wykresu, można zauważyć, wyraźniej niż w przypadku programu dla spółki ComArch S.A., zwiększenie wartości opcji już na początku okresu otwartego, co stanowi dla menedżera premię za zwiększone ryzyko niewykonania opcji.



Rysunek 1.6 Symulacja wartości opcji dla spółki PKN Orlen S.A.

7. PODSUMOWANIE

Z programami menedżerskimi związanych jest wiele problemów. Pierwszą grupą problemów stanowią zagadnienia związane z odpowiednią konstrukcją samych programów. Z jednej strony program menedżerski ma spełniać oczekiwania wystawiającego je przedsiębiorstwa, z drugiej jednak ma stanowić wynagrodzenie dla menedżera za osiągnięte wyniki. Najważniejszym zadaniem na etapie konstruowania programu jest zatem takie zdefiniowanie warunków, aby możliwe było ich spełnienie, ale równocześnie taka konstrukcja samego programu, aby niemożliwe było omówione wcześniej nieuczciwe wpływanie zainteresowanych osób na kształtowanie zysku z opcji menedżerskich.

Drugą grupę problemów związanych z programami menedżerskimi stanowi obszar związany z ich odpowiednią wyceną. W przedstawionym modelu starano się pokazać jak uwzględnić konkretne warunki rynkowe w procesie wyceny. Oczywiście możliwości związanych ze swobodnym kształtowaniem warunków jest tyle, że niemożliwym staje

się przedstawienie w jednym artykule wszystkich warunków, jednak postępując analogicznie do zaprezentowanych rozwiązań, z pewnością można poradzić sobie z bardzo egzotycznymi wymaganiami postawionymi menedżerom. Kolejnym problemem związanym z odpowiednią wyceną programów menedżerskich jest dostosowanie modeli do wymagań Międzynarodowego Standardu Sprawozdawczości Finansowej 2. Zrozumienie standardu stanowi absolutną podstawę przy konstruowaniu modeli wyceny. Jednak zakres niniejszego artykułu nie pozwala na szersze omówienie kwestii poruszonych w MSSF 2 ze względu na szczegółowość całego standardu i związaną z tym obszerność. Przedstawiony model jest zmodyfikowany pod kątem tegoż standardu.

Niniejszy artykuł miał na celu przekrojowe przedstawienie zagadnienia programów opcji menedżerskich od momentu konstrukcji programu do jego wyceny. Każdy z punktów mógłby zostać znacznie obszerniej potraktowany, jednak brak zbiorczych opracowań dotyczących opcji menedżerskich w polskiej literaturze skłania do przedstawienia przekroju całej tematyki bardziej niż szczegółowego zajęcia się wycinkiem tej problematyki. Przedstawiony model wyceny jest bardzo elastyczny w odniesieniu do uwzględnianych w programie warunków, a konkretne formy modelu zaprezentowane w tym artykule, miały posłużyć przykładowemu przedstawieniu możliwości modelu.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

- [1] Ayache E., Forsyth P.A., Vetzal K.R., [grudzień 2002], *Next generation models for convertible bonds with credit risk*, Wilmott Magazine, s. 68-77.
- [2] Ayache E., Forsyth P.A., Vetzal K.R., [2003], *Valuation of convertible bonds with credit risk*, „Journal of Derivatives”, jesień 2002, s. 9-30.
- [3] Carpenter J., [1998], *The exercise and valuation of executive stock options*, „Journal of Financial Economics”, nr 48, s. 127-158.
- [4] Carr P., Linetsky V., [2000], *The Valuation of Executive Stock Options in an Intensity-Based Framework*, „European Finance Review”, nr 4, s. 211-230.
- [5] Derman E., Kani I., Chriss N., [luty 1996], *Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile*, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes.
- [6] Heron R.A., Lie E., [2006], *Does backdating explain the stock price pattern around executive stock option grants?*, „Journal of Financial Economics”, s. 3.
- [7] Huddart S., Lang M., [1996], *Employee Stock Option Exercises: An Empirical Analysis*, „Journal of Accounting and Economics”, Vol. 21, nr 1, s. 5-43.
- [8] Hull J., White A., [2002], *How to value Employee Stock Options*.
- [9] Hull J., White A., [2003], *Accounting for Employee Stock Options*.
- [10] Kuźmierkiewicz M., [1999], *Ewolucja rynku opcji ku pozagiędkowym opcjom egzotycznym i ich klasyfikacja*, „Bank i Kredyt” nr 3, s. 18.
- [11] Lakonishok J., Lee I., [wiosna 2001], *Are Insider Trades Informative?*, „Review of Financial Studies”, Vol. 14, nr 1.
- [12] Międzynarodowy Standard Sprawozdawczości Finansowej 2 (MSSF 2, IFRS 2), 19.02.2004 r.
- [13] Musiela M., Rutkowski M., [Springer 2005], *Martingale Methods in Financial Modelling, Second Edition*.
- [14] Narayanan M.P., Seyhun H.N., [2007], *Dating Games: Do Managers Designate Grant Dates to Increase their Compensation*, Review of Financial Studies.
- [15] Noreen E., Wolfson M., [1981], *Equilibrium warrant pricing models and accounting for executive stock options*, „Journal of Accounting Research”, nr 29, s. 384-398.

- [16] Ong M., [1996], *Exotic options: The market and their taxonomy* (rozdział I), *The handbook of exotic options: instruments, analysis, and applications*, red. Nelken Israel, McGraw-Hill Book Company, New York 1996, s. 3, 10-11.
- [17] Preuss P., Ślusarski W., [1 marca 2007], *Ujęcie księgowo i wycena programów menedżerskich*.
- [18] Rubinstein M., [1995], *On the accounting valuation of employee stock options*, „Journal of Derivatives”, nr 3, s. 8-24.
- [19] Seyhuna H.N., [1988], *The Information Content of Aggregate Insider Trading*, „Journal of Business”, nr 61, s. 1-24.
- [20] Seyhuna H.N., [1992], *Why Does Aggregate Insider Trading Predict Future Stock Returns*, „Quarterly Journal of Economics”, Vol. 107, nr 4, s. 1303-1331.
- [21] West G., [14 stycznia 2009], *A Finite Difference Model for Valuation of Employee Stock Options*.

Praca wpłynęła do redakcji w lipcu 2010 r.

ZASTOSOWANIE MODELU DRZEWA TRÓJMIANOWEGO DO WYCENY OPCJI MENEDŻERSKICH

Streszczenie

W artykule omówiono konstrukcję oraz wycenę programów opcji menedżerskich. Przedstawione zostały warunki rynkowe oraz nierynkowe wykorzystywane w przypadku konstruowania programów opcyjnych. Wykorzystana metoda wyceny została oparta na drzewie trójmianowym, które zostało zmodyfikowane umożliwiając włączenie do wyceny zaprezentowanych warunków nabycia uprawnień oraz dostosowując model wyceny do wymagań Międzynarodowego Standardu Sprawozdawczości Finansowej 2.

Słowa kluczowe: opcje menedżerskie, wskaźnik odejść, wskaźnik wielokrotności

PRICING OF EMPLOYEE STOCK OPTIONS USING TRINOMIAL TREE

Summary

The article discusses the construction and pricing of Employee Stock Options Plans. There were presented performance conditions and market conditions that should be taken into account constructing ESOPs. The presented valuation method is based on a trinomial tree, which was modified making it possible to include presented vesting conditions in the pricing model and adapting it to the requirements of International Financial Reporting Standard 2.

Key words: Employee Stock Options, employee exit rate, multiple rate