

JACEK KWIATKOWSKI

BAYESOWSKA ESTYMACJA MODELU LOKALNEGO POZIOMU O ROZKŁADACH
DOPUSZCZAJĄCYCH WARUNKOWY ROZKŁAD t -STUDENTA
I ZMIENNĄ WARIANCJĘ¹

1. WSTĘP

Model lokalnego poziomu (ang. *Local Level Model*; LL) jest znaną od dawna konstrukcją modelową, która umożliwia bardziej elastyczne podejście do opisu warunkowej średniej procesu. W tym przypadku średnia traktowana jest jako odrębny proces stochastyczny, i tym samym może lepiej opisywać gwałtowne wzrosty lub spadki poziomu badanego zjawiska. Ze względu na własności szeregów czasowych, zwłaszcza finansowych, w ciągu ostatnich dwudziestu lat zaczęły pojawiać się prace, które modelując losową w czasie średnią, uwzględniały jednocześnie zmienną warunkową wariancję. Autorami takich prac są, na przykład: Harvey, Ruiz i Sentana [9], Kim i Nelson [10], Bos [2]. W ostatnich latach podjęto również próby uwzględnienia warunkowej zmienności wariancji, nie tylko w równaniu obserwacji, ale również w równaniu dla średniej. Tego typu konstrukcję modelową użyto w [7] i [23] do opisu kwartalnych danych wskaźnika cen konsumenta CPI w Stanach Zjednoczonych, a także w [20] i [21] dla kursu brytyjskiego funta względem euro. We wspomnianych pracach autorzy opisują własności modelu lokalnego poziomu, w którym warunkowe wariancje, w równaniu obserwacji i nieobserwowalnej średniej, są procesem GARCH(1,1) lub zmienności stochastycznej (ang. *Stochastic Volatility*; SV).

Prezentowany artykuł bezpośrednio nawiązuje do najnowszych publikacji dotyczących modelu lokalnego poziomu, a także jest ich rozszerzeniem. Artykuł ten, po pierwsze, przedstawia pełną, łączną estymację parametrów w modelu lokalnego poziomu z różnymi rodzajami zakłóceń losowych, w odróżnieniu od publikacji [20], [21] i [23], gdzie prawdopodobnie stosowano procedury dwuetapowe, tzn. w pierwszej kolejności używano filtr Kalmana, a następnie po wyliczeniu zakłóceń losowych, estymowano parametry dotyczące struktury GARCH lub SV. Po drugie, artykuł rozważa zakłócenia losowe, które są procesami GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem t -Studenta. Po trzecie, przedstawione badania dotyczą aktywów notowanych na giełdzie papierów wartościowych, a jak dotąd, mało wiadomo na temat empirycznych własności modelu lokalnego poziomu dla tego typu danych.

¹ Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2011 jako projekt badawczy numer N N111 431737. Autor dziękuje anonimowemu recenzentowi za bardzo wnikliwe uwagi i poprawki. Adres elektroniczny: jkwiat@umk.pl

Układ artykułu jest następujący. W części drugiej przedstawiono postać i własności modelu lokalnego poziomu. Oprócz rysu historycznego omówiono również najnowsze badania w tym zakresie. W części trzeciej przedstawiono bayesowską analizę modelu lokalnego poziomu. Ostatnia, czwarta część zawiera badania empiryczne dotyczące szeregu notowań wybranej spółki giełdowej. Całość pracy kończy wniosek.

2. POSTAĆ I WŁASNOŚCI MODELU LOKALNEGO POZIOMU

Model lokalnego poziomu ma długą tradycję i dobrze ugruntowaną pozycję w analizie szeregów czasowych. Jest on na przykład wykorzystywany w interpretacji popularnej metody prognozowania znanej jako wyrównywanie wykładnicze, często stosowanej w ekonometrii (zob. np. [13]). Model LL jest również najprostszym modelem przestrzeni stanów. Jego własności można znaleźć w licznych publikacjach: [4], [8], [11], [20] oraz [24]. Ma on następującą postać:

$$y_t = \delta_t + \varepsilon_t, \{\varepsilon_t\} \sim D(0, \sigma_t^2), \quad (1)$$

$$\delta_t = \delta_{t-1} + \eta_t, \{\eta_t\} \sim D(0, \omega_t^2) \text{ oraz } \delta_0 = 0. \quad (2)$$

W modelu tym przez y_t , dla $t = 1, \dots, T$, oznaczono obserwacje zmiennej zależnej, a $D(0, \sigma_t^2)$ i $D(0, \omega_t^2)$ oznaczają dowolne rozkłady o wartości oczekiwanej równej zero i wariancji, odpowiednio σ_t^2 i ω_t^2 . Procesy $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_s\}$ są niezależne dla wszystkich s i t . W modelu LL zmienną $\{\delta_t\}$ traktuje się jako odrębny proces stochastyczny, natomiast zakłócenia losowe $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ mogą być procesami typu GARCH lub SV. W modelach przestrzeni stanów równanie (1) nosi nazwę równania obserwacji, natomiast równanie (2) – równania stanu.

Najczęściej przyjmuje się założenie, że zarówno $\{\varepsilon_t\}$ jak i $\{\eta_t\}$ są ciągami niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym i skończonej wariancji. Mamy wtedy $\sigma_t^2 = \sigma^2$ oraz $\omega_t^2 = \omega^2$ i model (1)-(2) redukuje się do podstawowego, tradycyjnego modelu lokalnego poziomu:

$$y_t = \delta_t + \varepsilon_t, \{\varepsilon_t\} \sim N(0, \sigma^2), \quad (3)$$

$$\delta_t = \delta_{t-1} + \eta_t, \{\eta_t\} \sim N(0, \omega^2), \quad (4)$$

w którym $\{\delta_t\}$ jest procesem błędzenia przypadkowego.

Istnieje kilka różnych sposobów interpretacji podstawowego modelu lokalnego poziomu (3)-(4). Po pierwsze, model LL może być interpretowany jako model, w którym, jak już wspomniano, średnia $\{\delta_t\}$ jest odrębnym procesem stochastycznym. Po drugie, jeżeli będziemy iteracyjnie podstawiali równanie stanu (4) do równania obserwacji (3) otrzymamy:

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^t \eta_i + \delta_0. \quad (5)$$

Zmienna obserwowana y_t jest zatem sumą dwóch składników: błędzenia przypadkowego i białego szumu. Siłę poszczególnych składników można wyrazić jako stosunek wariancji w równaniu stanu, do wariancji w równaniu obserwacji, tj. $r = \omega^2/\sigma^2$. Nosi on nazwę relacji sygnału do szumu (ang. *signal-to-noise ratio*) i jest dobrze znany w modelach przestrzeni stanów. Dla $r \rightarrow \infty$, model LL sprowadza się do szeroko znanego w literaturze finansowej modelu błędzenia przypadkowego. Na podstawie siły wpływu błędzenia przypadkowego, w stosunku do szumu, można określić, na przykład, stopień integracji badanego procesu (por. [12])².

Po trzecie, podstawiając równanie stanu (4) do równania obserwacji (3) można zauważyć, że model LL ma taką samą autokorelacyjną strukturę jak model ARIMA(0,1,1):

$$y_t = \frac{\eta_t}{1-L} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1-L)y_t = \eta_t + (1-L)\varepsilon_t, \quad (6)$$

czyli:

$$\Delta y_t = \eta_t + \Delta \varepsilon_t. \quad (7)$$

Dokonując prostych przekształceń, West i Harrison [24] wykazali, że pierwsze przyrosty procesu lokalnego poziomu $\{\Delta y_t\}$, są równoważne procesowi średniej ruchomej, ze współczynnikiem ϑ :

$$\Delta y_t = \xi_t + \vartheta \xi_{t-1}, \quad (8)$$

gdzie $\vartheta = 1 - r(\sqrt{1 + 4/r} - 1)/2$, zatem $-1 < \vartheta < 0$. Oznacza to, że funkcja autokorelacji procesu $\{\Delta y_t\}$ przyjmuje istotną, ujemną wartość dla rzędu pierwszego i zera dla pozostałych, natomiast funkcja autokorelacji cząstkowej wraz ze wzrostem opóźnień, dąży do zera w tempie wykładniczym. Ujemna autokorelacja pierwszych różnic występuje najczęściej jako skutek błędnej identyfikacji procesu. Przyjęcie zbędnego różnicowania dla stacjonarnego procesu AR(1), może powodować jego identyfikację jako MA(1) z ujemną autokorelacją rzędu pierwszego (por. [22]). Jednak w tym przypadku, ujemna zależność autokorelacyjna nie jest następstwem błędnej identyfikacji, ale efektem procesu generującego dane.

W modelu LL, do opisu zmienności zakłóceń losowych, można posłużyć się strukturą GARCH(1,1) w postaci:

$$\{\varepsilon_t\} \sim N(0, \sigma_t^2) \text{ i } \{\eta_t\} \sim N(0, \omega_t^2), \quad (9)$$

gdzie:

$$\sigma_t^2 = h_{szum,t}^{GARCH} \text{ i } \omega_t^2 = h_{stan,t}^{GARCH}, \quad (10)$$

² Inne, ciekawe zastosowanie relacji sygnału do szumu w klasyfikacji polskich szeregów finansowych przedstawiają Doman i Doman [3].

$$h_{szum,t}^{GARCH} = b_{1,szum} h_{szum,t-1}^{GARCH} + a_{0,szum} + a_{1,szum} (E\varepsilon_{t-1})^2, \quad (11)$$

$$h_{stan,t}^{GARCH} = b_{1,stan} h_{stan,t-1}^{GARCH} + a_{0,stan} + a_{1,stan} (E\eta_{t-1})^2, \quad (12)$$

wraz ze standardowymi założeniami zapewniającymi dodatniość i skończoność warunkowych wariancji (por. [1]):

$$a_{0,szum(stan)} \equiv 1 - b_{1,szum(stan)} - a_{1,szum(stan)}, \quad (13)$$

$$b_{1,szum(stan)} \geq 0, a_{1,szum(stan)} \geq 0, a_{1,szum(stan)} + b_{1,szum(stan)} < 1 \quad (14)$$

oraz $\text{var}(\varepsilon_t) = 1$ i $\text{var}(\eta_t) = 1$ oraz $E(h_{szum(stan),t}^{GARCH}) = 1$.

W odróżnieniu od podstawowego modelu GARCH, w równaniach (11) i (12), kwadraty zakłóceń losowych $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ muszą być zastąpione ich przybliżeniem, ponieważ w równaniu obserwacji (2) występują zmienne ukryte $\{\delta_t\}$, co oznacza, że również nie można uzyskać realizacji $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$. Dlatego też jako ich przybliżenie, w tym przypadku, użyto:

$$e_t = E(\varepsilon_t | y) = y_t - E(\delta_t | y), \quad (15)$$

$$u_t = E(\eta_t | y) = E(\delta_t | y) - E(\delta_{t-1} | y), \quad (16)$$

gdzie $E(\cdot | y)$ jest wartością oczekiwaną *a posteriori*.

Modele lokalnego poziomu ze składnikami losowymi typu GARCH(1,1) i warunkowym rozkładem normalnym oznaczono jako LL-GARCH.

Rozszerzmy model lokalnego poziomu o rozkłady dopuszczające warunkowy rozkład *t*-Studenta. Zakłócenia losowe mają wtedy następującą postać:

$$\{\varepsilon_t\} \sim t\left(0, \frac{v_{szum}}{(v_{szum} - 2)\sigma_t^2}, v_{szum}\right) \text{ i } \{\eta_t\} \sim t\left(0, \frac{v_{stan}}{(v_{stan} - 2)\omega_t^2}, v_{stan}\right), v_{szum(stan)} > 2, \quad (17)$$

gdzie $t(a, w, v)$ oznacza jednowymiarowy rozkład Studenta o niecentralności a , precyzji w i stopniach swobody v (por. [18]). Model ten oznaczono jako LL-GARCH-Student.

Następnym wariantem jest model LL, w którym zakłócenia losowe są procesem zmienności stochastycznej SV:

$$h_{szum,t}^{SV} = \rho_{szum} h_{szum,t-1}^{SV} + \zeta_{szum,t}, \quad (18)$$

$$h_{stan,t}^{SV} = \rho_{stan} h_{stan,t-1}^{SV} + \zeta_{stan,t}, \quad (19)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\} \sim N(0, \sigma_t^2)$ i $\{\eta_t\} \sim N(0, \omega_t^2)$, $\sigma_t^2 = \exp(h_{szum,t}^{SV})$ i $\omega_t^2 = \exp(h_{stan,t}^{SV})$ oraz $\rho_{szum(stan)} \in (-1, 1)$, a także $\zeta_{szum(stan)} \sim N(0, \gamma_{szum(stan)}^2)$.

Oznaczmy przez:

$$\pi_{(1)} = (a_{1,szum}, b_{1,szum}, a_{1,stan}, b_{1,stan})', \quad (20)$$

$$\pi_{(2)} = (a_{1,szum}, b_{1,szum}, v_{szum}, a_{1,stan}, b_{1,stan}, v_{stan})' \quad (21)$$

wektory nieznanych parametrów w modelu LL-GARCH i LL-GARCH-Student oraz przez:

$$\pi_{(3)} = (\rho_{szum}, \gamma_{szum}^2, v_{szum}, \rho_{stan}, \gamma_{stan}^2, v_{stan})' \quad (22)$$

wektor parametrów w modelu LL-SV.

Przy danym wektorze parametrów $\pi_{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) oraz całej przeszłości procesu Ψ_{t-1} , warunkowa wariancja, pierwszych przyrostów $\{\Delta y_t\}$, dla (1)-(2), jest równa:

$$Var(\Delta y_t | \Psi_{t-1}, \pi_{(i)}) = \omega_t^2 + 2\sigma_t^2 \quad (23)$$

lub w równoważnej formie:

$$Var(\Delta y_t | \Psi_{t-1}, \pi_{(i)}) = \sigma_t^2 (r_t + 2), \quad (24)$$

gdzie $r_t = \omega_t^2 / \sigma_t^2$ jest zmienną w czasie relacją sygnału do szumu, natomiast warunkowa kowariancja między Δy_t i Δy_{t-1} wynosi:

$$cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-1} | \Psi_{t-1}, \pi_{(i)}) = -\sigma_t^2. \quad (25)$$

Ponieważ wariancja warunkowa jest dodatnia, a kowariancja (25) ujemna, funkcja autokorelacji rzędu pierwszego przyjmuje zawsze wartość ujemną, i dodatkowo jest zmienna w czasie:

$$corr(\Delta y_t, \Delta y_{t-1} | \Psi_{t-1}, \pi_{(i)}) = \frac{-\sigma_t^2}{\omega_t^2 + 2\sigma_t^2}. \quad (26)$$

Z kolei warunkowy współczynnik koncentracji, w modelu (1)-(2), jest równy (zob. [20]):

$$\kappa(\Delta y_t | \Psi_{t-1}, \pi_{(i)}) = \frac{1}{(r_t + 2)^2} [r_t^2 \kappa_\eta + 12r_t + 2\kappa_\varepsilon + 6(\rho_1^{\varepsilon^2} (\kappa_\varepsilon - 1) + 1)], \quad (27)$$

gdzie κ_ε i κ_η jest współczynnikiem koncentracji odpowiednio dla $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$, natomiast $\rho_1^{\varepsilon^2}$ jest współczynnikiem autokorelacji rzędu pierwszego procesu $\{\varepsilon_t^2\}$.

Zasadniczym wnioskiem, jaki wynika ze wzoru (27) jest to, że przy dowolnej wartości r , koncentracja pierwszych przyrostów, $\{\Delta y_t\}$, jest mniejsza bądź równa maksymalnej wartości κ_ε i κ_η , tj. $\kappa(\Delta y_t | \Psi_{t-1}, \pi_{(i)}) \leq \max(\kappa_\varepsilon, \kappa_\eta)$.

Postać funkcji autokorelacji, dla kwadratów pierwszych przyrostów procesu $\{(\Delta y_t)^2\}$, ma postać:

$$\rho_\tau((\Delta y_t)^2 | \Psi_{t-1}, \pi_{(i)}) = \frac{r_t^2 \rho_\tau^2 (\kappa_\eta - 1) + (\kappa_\varepsilon - 1)(\rho_{\tau-1}^2 + 2\rho_\tau^2 + \rho_{\tau+1}^2)}{r_t^2 (\kappa_\eta - 1) + 8r_t^2 + 2(\kappa_\varepsilon - 1)(1 + 3\rho_1^2)}, \quad (28)$$

dla $\tau = 1, 2, \dots$, natomiast $\rho_1(\eta_t^2)$ jest współczynnikiem autokorelacji rzędu pierwszego η_t^2 .

W modelu LL-SV, ω_t^2 i σ_t^2 są mierzalne względem Ψ_{t-1} . Z tego też względu, gdy rozważamy $\pi_{(3)}$, we wzorach (23)-(28) należy dodatkowo uwzględnić warunkowanie względem ω_t^2 i σ_t^2 .

Jeżeli $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ nie mają rozkładu normalnego, ale nadal są ciągiem niezależnych zmiennych losowych, które mają skończone pierwsze cztery momenty zwykłe, współczynnik koncentracji redukuje się do:

$$\kappa(\Delta y_t) = \frac{1}{(r+2)^2} [r^2 \kappa_\eta + 12r + 2\kappa_\varepsilon + 6]. \quad (29)$$

Z kolei funkcja autokorelacji dla kwadratów $\{(\Delta y_t)^2\}$, ma w tej sytuacji postać:

$$\rho_\tau(\Delta y_t)^2 = \begin{cases} \frac{\kappa_\varepsilon - 1}{(r+2)^2 (\kappa(\Delta y_t) - 1)}, & \tau = 1 \\ 0, & \tau \geq 2. \end{cases} \quad (30)$$

Przy założeniu normalności, wartość funkcja autokorelacji rzędu pierwszego, redukuje się do $\rho_1(\Delta y_t)^2 = (r+2)^{-2}$.

Oczywiście dla zakłóceń losowych o rozkładzie normalnym, wystarczy, że za κ_ε i κ_η podstawimy wartość 3, co ostatecznie daje $\kappa(\Delta y_t) = 3$.

Jak widać we wzorze (30), relacja sygnału do szumu odgrywa ważną rolę w ustaleniu wartości współczynnika koncentracji, ponieważ w podstawowym modelu lokalnego poziomu (3)-(4), dla $r \rightarrow \infty$, mamy $\Delta y_t = \eta_t$, czyli proces błędzenia przypadkowego, a koncentracja jest identyczna jak dla $\{\eta_t\}$, tzn. wzór (29) redukuje się do $\kappa(\Delta y_t) = \kappa_\eta = 3$. Z kolei dla $r \rightarrow 0$, mamy $\Delta y_t = \Delta \varepsilon_t$, czyli $\{y_t\}$ jest procesem białego szumu, natomiast jego pierwsze przyrosty $\{\Delta y_t\}$ są nieodwracalnym procesem białego szumu MA(1) z $\kappa(\Delta y_t) = 3$.

W pozostałych przypadkach współczynnik koncentracji pierwszych przyrostów zależy od: zamiennej w czasie relacji sygnału do szumu, wartości współczynnika koncentracji procesów $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ oraz od wartości współczynnika autokorelacji ρ_1^2 .

3. ESTYMACJA W PRZYPADKU ZMIENNEJ WARIANCJI I ROZKŁADU t -STUDENTA

Założenie normalności w modelu (3)-(4) jest bardzo wygodne, ponieważ umożliwia prosty automatyzm w algorytmie Kalmana. Jak jednak wiadomo z licznych badań

empirycznych (np. [5]), w przypadku niektórych danych, zwłaszcza finansowych, warunkowa normalność i stała wariancja zakłócenia losowego nie jest w stanie skutecznie opisać zwiększonej kurtozy i efektu skupienia zmienności. Dlatego też istnieje potrzeba stworzenia narzędzi, które z jednej strony zakładają losowość parametrów w średniej, z drugiej strony bazują na rozkładach o grubszych ogonach niż rozkład normalny oraz mają dodatkowo zmienną w czasie warunkową wariancję.

Gdy zakłócenia losowe w modelu przestrzeni stanów nie mają rozkładu normalnego, ale t -Studenta, nie istnieje prosta możliwość zastosowania technik filtru Kalmana. Problem ten można jednak stosunkowo łatwo rozwiązać, poprzez wprowadzenie dodatkowej zmiennej ukrytej $\{z_t\}$, tak aby zakłócenia losowe miały (warunkowy) rozkład normalny:

$$\{\varepsilon_t | z_{szum,t}\} \sim N(0, z_{szum,t}), z_{szum,t} \sim IG(v_{szum}/2, (v_{szum} - 2)/2), \quad (31)$$

$$\{\eta_t | z_{stan,t}\} \sim N(0, z_{stan,t}), z_{stan,t} \sim IG(v_{stan}/2, (v_{stan} - 2)/2). \quad (32)$$

Symbol $IG(c, d)$ oznacza odwrócony rozkład gamma o średniej $E(\theta) = d/(c - 1)$, dla $c > 1$ i wariancji $Var(\theta) = d^2/[(c - 1)^2(c - 2)]$, dla $c > 2$. Jego gęstość wyraża się wzorem:

$$f_{IG}(\theta | c, d) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \theta^{-(c+1)} \exp\left(-\frac{d}{\theta}\right), \theta > 0, c > 0, d > 0. \quad (33)$$

Aby wykazać prawdziwość zależności (31)-(32), należy skorzystać ze znanych w literaturze przedmiotu tożsamości (por. [15], str. 183; [1]). Całkując względem $\{z_t\}$ otrzymujemy:

$$p(u_t) = \int_0^\infty p(u_t | z_t) p(z_t) dz_t = \int_0^\infty f_N(u_t | 0, z_t) f_{IG}(z_t | v/2, (v - 2)/2) dz_t = f_t\left(u_t | 0, \frac{v}{(v - 2)}, v\right), \quad (34)$$

gdzie $f_t(\cdot |)$ oznacza gęstość rozkładu t -Studenta o niecentralności 0, precyzji $v/(v - 2)$ i v stopniach swobody. Symbolem $f_N(\cdot | c, d)$ oznaczono gęstość rozkładu normalnego o średniej c i wariancji d .

Oznaczmy przez $p(\pi_{(i)})$, $i = 1, 2, 3$ gęstość *a priori* wektora $\pi_{(i)}$ oraz załóżmy, że gęstość łącznego rozkładu *a priori* wektora parametrów jest iloczynem gęstości brzegowych jego współrzędnych.

Bayesowski model statystyczny z losową średnią i zakłóceniami losowymi typu GARCH(1,1) oraz z warunkowym rozkładem normalnym, ma następującą postać:

$$p(y, \delta, \pi_{(1)}) = p(y | \delta, \pi_{(1)}) p(\delta | \pi_{(1)}) p(\pi_{(1)}), \quad (35)$$

natomiast gdy zakłócenia losowe w modelu LL są procesem SV, można go zapisać jako:

$$p(y, \delta, h, \pi_{(3)}) = p(y | \delta, h)p(\delta | h)p(h | \pi_{(3)})p(\pi_{(3)}). \tag{36}$$

Jeżeli zakłócenia losowe w modelu LL są procesem GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem *t*-Studenta, bayesowski model statystyczny przyjmuje postać:

$$p(y, \delta, z, \pi_{(2)}) = p(y | \delta, z, \pi_{(2)})p(\delta | z, \pi_{(2)})p(z | \pi_{(2)})p(\pi_{(2)}). \tag{37}$$

Przez δ , z i h oznaczono wektory zmiennych ukrytych $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_T)'$, $z = (z_{szum}, z_{stan})'$, $z_{szum} = (z_{szum,1}, \dots, z_{szum,T})$, $z_{stan} = (z_{stan,1}, \dots, z_{stan,T})$ oraz $h = (h_{szum}^{SV}, h_{stan}^{SV})'$, $h_{szum}^{SV} = (h_{szum,1}^{SV}, \dots, h_{szum,T}^{SV})$, $h_{stan}^{SV} = (h_{stan,1}^{SV}, \dots, h_{stan,T}^{SV})$.

W podejściu bayesowskim, informacja, na temat wszystkich nieznanymi wielkości, wyrażana jest za pomocą rozkładów prawdopodobieństwa, a podział na stałe (niezmiennie w czasie) i zmienne parametry, tzn. traktowane jako proces stochastyczny, jest wyłącznie kwestią interpretacji ([6] i [16]). W modelu bayesowskim zmienne ukryte, w tym tzw. parametry losowo zmienne w czasie, traktowane są po prostu jako dodatkowe parametry. Od strony formalnej, nie różnią się one niczym od pozostałych parametrów występujących w modelu, dlatego też ich estymację przeprowadza się w taki sam sposób, jak estymację pozostałych parametrów. To, co wyróżnia model (bayesowski) ze zmiennymi ukrytymi od innych modeli, to niewątpliwie jego hierarchiczna struktura oraz liczba estymowanych parametrów, która jest nieraz większa, czasami kilkakrotnie, od liczby dostępnych obserwacji.

Tabela 1

Rozkłady *a priori* dla parametrów w modelach LL

Parametr	Przyjęty rozkład <i>a priori</i>	Hiperparametry	Użyty w modelu
$a_{1,szum(stan)}$ i $b_{1,szum(stan)}$	Jednostajny w obszarze stacjonarności i dodatniości warunkowej wariancji		LL-GARCH, LL-GARCH-Student
$v_{szum(stan)}$	Ucięty Cauchy'ego, $v_{szum(stan)} > 2$		LL-GARCH-Student
$\rho_{szum(stan)}$	Ucięty normalny $N(\mu_\rho, \sigma_\rho^2)$, $\rho_{szum(stan)} \in (-1,1)$	$\mu_\rho = 0,9$, $\sigma_\rho^2 = 1$	LL-SV
$\gamma_{szum(stan)}^2$	Odwrócony gamma $IG(c, d)$, $\gamma_{szum(stan)}^2, \sigma^2, \omega_i^2 > 0$	$c = 0,01$, $d = 0,01$	LL-SV

Źródło: opracowanie własne.

Aby bayesowski model statystyczny był kompletny należy określić rozkłady *a priori*. W tym przypadku przyjęto dla wszystkich parametrów, jako rozkłady *a priori*, rozkłady właściwe w większości wyrażające nikłą wiedzę badacza na temat ich prawdziwych wartości. Wyjątkiem jest tu rozkład *a priori* współczynnika autoregresji w równaniu warunkowej wariancji procesu SV, który ma ucięty rozkład normalny z parametrem $\mu_\rho = 0,9$ oraz rozkład *a priori* dla stopni swobody, który bardzo faworyzuje rozkład normalny. Ponieważ wcześniejsze wyniki badań zamieszczone w [7], [20] i [21], wska-

zują na silną autokorelację w równaniach warunkowej wariancji, postanowiono przyjąć informacyjny rozkład *a priori* dla $\rho_{szum(stan)}$, w którym parametr μ_ρ sugeruje znaczną persystencję zmienności. Rozkłady *a priori* zmiennych ukrytych, tj. wektora warunkowych średnich δ i wektora h dla procesu SV, wynikają bezpośrednio z hierarchicznej struktury rozpatrywanych modeli, dlatego też pominięto je w opisie (por. [11]). Szczegółowe informacje na temat rozkładów *a priori* zawiera tabela 1.

Tak zadana struktura aprioryczna, w większości przypadków, prowadzi do standardowych warunkowych rozkładów *a posteriori*, ponieważ są to na ogół rozkłady normalne lub odwrócone rozkłady gamma. Umożliwia to bezpośrednie losowanie i tym samym łatwe i szybkie uzyskanie próby losowej. Pełne warunkowe rozkłady *a posteriori* parametrów oraz zmiennych ukrytych, dla omawianych tu modeli, przedstawia tabela 2.

W większości przypadków przyjęte rozkłady *a priori*, zamieszczone w tabeli 1, prowadzą do standardowych rozkładów *a posteriori*, takich jak ucięty rozkład normalny (dla współczynnika autoregresji $\rho_{szum(stan)}$) lub odwrócony rozkład gamma (dla wariancji $\gamma_{szum(stan)}^2$ i zmiennych ukrytych $z_{szum(stan),t}$). Również średnia $\{\delta_t\}$, przedstawiona równaniami (38)-(43), ma warunkowy normalny rozkład *a posteriori*.

Pełne warunkowe rozkłady *a posteriori* dla liczby stopni swobody nie należą do żadnej znanej standardowej klasy rozkładów. Również parametry struktury GARCH oraz warunkowa wariancja dla procesu SV wymagają dodatkowego schematu losowania, wewnątrz procedury Gibbsa. W tym przypadku był to algorytm Metropolisa i Hastingsa. W literaturze polskiej, tego typu zagadnienia omawia np. Pajor [19].

Tabela 2

Warunkowe gęstości *a posteriori* dla estymowanych parametrów w modelach LL

Parametr	Warunkowa gęstość <i>a posteriori</i>
$a_{1,szum}$ i $b_{1,szum}$	$p(a_{1,szum}, b_{1,szum} y, \delta, z_{szum}, \sigma_\rho^2) \propto \prod_{t=1}^T f_N(y_t \delta_t, z_{szum,t}, \sigma_\rho^2) p(a_{1,szum}, b_{1,szum})$
$a_{1,stan}$ i $b_{1,stan}$	$p(a_{1,stan}, b_{1,stan} y, \delta, z_{stan}, \delta_0, \omega_0^2) \propto \prod_{t=1}^T f_N(\delta_t \delta_{t-1}, z_{stan,t}, \omega_t^2) p(a_{1,stan}, b_{1,stan})$
v_{szum}	$p(v_{szum} y, z_{szum}) \propto \prod_{t=1}^T \left[\frac{v_{szum} - 2}{2} \right]^{v_{szum}/2} \Gamma\left(\frac{v_{szum}}{2}\right) z_{szum,t}^{-\left(\frac{v_{szum}}{2} + 1\right)} \exp\left\{-\frac{v_{szum} - 2}{2z_{szum,t}}\right\} \frac{1}{1 + v_{szum}^2}$
v_{stan}	$p(v_{stan} y, z_{stan}) \propto \prod_{t=1}^T \left[\frac{v_{stan} - 2}{2} \right]^{v_{stan}/2} \Gamma\left(\frac{v_{stan}}{2}\right) z_{stan,t}^{-\left(\frac{v_{stan}}{2} + 1\right)} \exp\left\{-\frac{v_{stan} - 2}{2z_{stan,t}}\right\} \frac{1}{1 + v_{stan}^2}$
ρ_{szum}	$p(\rho_{szum} y, h_{szum,0}^{SV}, h_{szum}^{SV}, \gamma_{szum}^2) \propto$ $\propto f_N\left(\rho_{szum} \left \frac{\mu_\rho \gamma_{szum}^2 + \sigma_\rho^2 \sum_{t=1}^T h_{szum,t-1}^{2,SV} h_{szum,t}^{SV}}{\sigma_\rho^2 \sum_{t=1}^T h_{szum,t-1}^{2,SV} + \gamma_{szum}^2}, \frac{\sigma_\rho^2 \gamma_{szum}^2}{\sigma_\rho^2 \sum_{t=1}^T h_{szum,t-1}^{2,SV} + \gamma_{szum}^2} \right.\right)$

cd. tabeli 2

Parametr	Warunkowa gęstość <i>a posteriori</i>
ρ_{stan}	$p(\rho_{stan} y, h_{stan,0}^{SV}, h_{stan}^{SV}, \gamma_{stan}^2) \propto$ $\propto f_N \left(\rho_{stan} \left \frac{\mu_\rho \gamma_{stan}^2 + \sigma_\rho^2 \sum_{t=1}^T h_{stan,t-1}^{2,SV} h_{stan,t}^{SV}}{\sigma_\rho^2 \sum_{t=1}^T h_{stan,t-1}^{2,SV} + \gamma_{stan}^2}, \frac{\sigma_\rho^2 \gamma_{stan}^2}{\sigma_\rho^2 \sum_{t=1}^T h_{stan,t-1}^{2,SV} + \gamma_{stan}^2} \right. \right)$
$\gamma_{szum(stan)}^2$	$p(\gamma_{szum(stan)}^2 y, h_{szum(stan),0}^{SV}, h_{szum(stan)}^{SV}, \rho_{szum(stan)}) =$ $f_{IG} \left(\gamma_{szum(stan)}^2 \left \frac{T + 2c_\gamma}{2}, \frac{\sum_{t=1}^T (h_{szum(stan),t}^{SV} - \rho_{szum(stan)} h_{szum(stan),t-1}^{SV})^2 + 2d_\gamma}{2} \right. \right)$
$z_{szum,t}$	$p(z_{szum,t} y, \delta_t, v_{szum}, \pi_{(2)}) = f_{IG} \left(z_{szum,t} \left \frac{v_{szum} + 1}{2}, \left(\frac{(y_t - \delta_t)^2}{\sigma_t^2} + v_{szum} - 2 \right) / 2 \right. \right)$
$z_{stan,t}$	$p(z_{stan,t} y, \delta_0, \delta_t, \delta_{t-1}, v_{stan}, \pi_{(2)}) = f_{IG} \left(z_{stan,t} \left \frac{v_{stan} + 1}{2}, \left(\frac{(\delta_t - \delta_{t-1})^2}{\omega_t^2} + v_{stan} - 2 \right) / 2 \right. \right)$
δ_t	Patrz wzory (38)-(43), zamieszczone w głównym tekście artykułu.
$h_{szum,t}^{SV}$	$p(h_{szum,t}^{SV} y, \delta_t, h_{szum,0}^{SV}, h_{szum,t-1}^{SV}, h_{szum,t+1}^{SV}, \pi_{(3)}) \propto$ $\frac{1}{h_{szum,t}^{0.5,SV}} \exp \left\{ -\frac{(y_t - \delta_t)^2}{2\sigma_t^2} \right\} \frac{1}{h_{szum,t}^{SV}} \exp \left\{ -\frac{1}{2Var_\gamma} (h_{szum,t}^{SV} - s_t) \right\},$ <p>gdzie s_t i Var_γ wyrażają się wzorami:</p> $s_t = \rho_{szum} (h_{szum,t+1}^{SV} + h_{szum,t-1}^{SV}) / (1 + \rho_{szum}^2), Var_\gamma = \frac{\gamma_{szum}^2}{1 + \rho_{szum}^2}, \text{ dla } t = 1, \dots, T-1$ <p>oraz $s_T = \rho_{szum} h_{szum,t-1}^{SV}, Var_\gamma = \gamma_{szum}^2$, dla $t = T$, por. [19].</p>
$h_{stan,t}^{SV}$	$p(h_{stan,t}^{SV} y, \delta_0, \delta_t, \delta_{t-1}, h_{stan,0}^{SV}, h_{stan,t-1}^{SV}, h_{stan,t+1}^{SV}, \pi_{(3)}) \propto$ $\frac{1}{h_{stan,t}^{0.5,SV}} \exp \left\{ -\frac{(\delta_t - \delta_{t-1})^2}{2\omega_t^2} \right\} \frac{1}{h_{stan,t}^{SV}} \exp \left\{ -\frac{1}{2Var_\gamma} (h_{stan,t}^{SV} - s_t) \right\},$ <p>gdzie s_t i Var_γ wyrażają się wzorami:</p> $s_t = \rho_{stan} (h_{stan,t+1}^{SV} + h_{stan,t-1}^{SV}) / (1 + \rho_{stan}^2), Var_\gamma = \frac{\gamma_{stan}^2}{1 + \rho_{stan}^2}, \text{ dla } t = 1, \dots, T-1$ <p>oraz $s_T = \rho_{stan} h_{stan,t-1}^{SV}, Var_\gamma = \gamma_{stan}^2$, dla $t = T$, por. [19].</p>

Źródło: obliczenia własne.

W modelach LL-GARCH, LL-GARCH-Student i LL-SV mamy nieobserwowalną średnią $\{\delta_t\}$ oraz warunkową heteroskedastyczność w równaniu obserwacji i stanu. Mimo to losowania dla $\{\delta_t\}$ można przeprowadzić bardzo łatwo, ponieważ warunkowe rozkłady *a posteriori* mają rozkład normalny, tym samym losowanie z pełnych

warunkowych rozkładów zmiennej ukrytej δ_t ($t = 1, \dots, T$) jest bardzo proste i w pełni zautomatyzowane. Poniżej przedstawiono warunkowe gęstości *a posteriori* zmiennej $\{\delta_t\}$, w zależności od modelu opisującego warunkową heteroskedastyczność.

W modelu LL-GARCH-Student, zmienna $\{\delta_t\}$ ma następującą gęstość *a posteriori*:

$$p(\delta_t | y_t, \sigma^2, \omega^2, \pi_{(2)}, \delta_0, \delta_{t-1}, \delta_{t+1}, z_{szum,t}, z_{stan,t}, z_{stan,t+1}) = f_N(\delta_t | g_{\delta_t}, Var_{\delta_t}), \quad (38)$$

$$g_{\delta_t} = \frac{\sigma_t^2 z_{szum,t} (\delta_{t-1} \sigma_{t+1}^2 z_{szum,t+1} + \delta_{t+1} \omega_t^2 z_{stan,t}) + y_t \omega_t^2 z_{stan,t} \omega_{t+1}^2 z_{stan,t+1}}{\sigma_t^2 z_{szum,t} (\omega_{t+1}^2 z_{stan,t+1} + \omega_t^2 z_{stan,t}) + \omega_t^2 z_{stan,t} \omega_{t+1}^2 z_{stan,t+1}}, \quad (39)$$

$$Var_{\delta_t} = \frac{\sigma_t^2 z_{szum,t} \omega_t^2 z_{stan,t} \omega_{t+1}^2 z_{stan,t+1}}{\sigma_t^2 z_{szum,t} (\omega_{t+1}^2 z_{stan,t+1} + \omega_t^2 z_{stan,t}) + \omega_t^2 z_{stan,t} \omega_{t+1}^2 z_{stan,t+1}}, \quad (40)$$

dla $t = 1, \dots, T-1$.

Dla ostatniej obserwacji $t = T$, mamy:

$$p(\delta_T | y_T, \sigma_{szum}^2, \sigma_{stan}^2, \pi_{(2)}, \delta_{T-1}, z_{szum,T}, z_{stan,T}) = f_N(\delta_T | g_{\delta_T}, Var_{\delta_T}), \quad (41)$$

gdzie średnia i wariancja są równe:

$$g_{\delta_T} = \frac{\sigma_T^2 z_{szum,T} \delta_{T-1} + y_T \omega_T^2 z_{stan,T}}{\sigma_T^2 + \omega_T^2 z_{stan,T}}, \quad (42)$$

$$Var_{\delta_T} = \frac{\sigma_T^2 z_{szum,T} \omega_T^2 z_{stan,T}}{\sigma_T^2 + \omega_T^2 z_{stan,T}}. \quad (43)$$

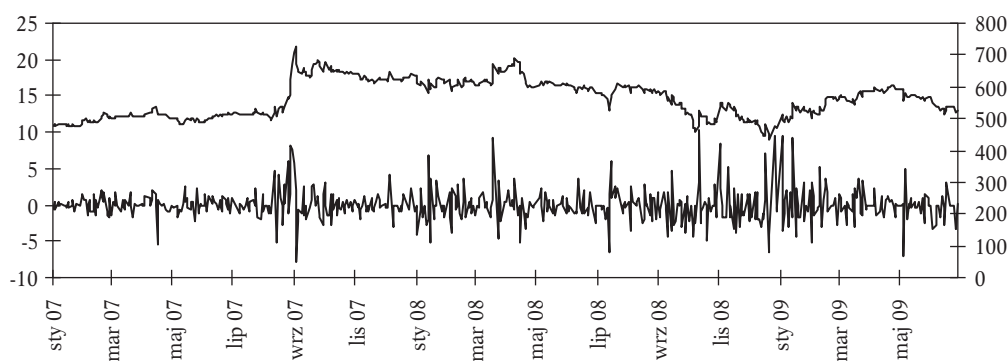
W modelu LL-GARCH, we wzorach (38)-(43) wystarczy nałożyć warunki ograniczające, tj. przyjąć, że $z_{stan,t} = 1$ oraz $z_{szum,t} = 1$ dla $t = 1, \dots, T$. Podobnie postępujemy w modelu LL-SV, jednak w tym przypadku należy pamiętać, że po lewej stronie równania (38) i (41) trzeba dodatkowo uwzględnić wektor zmiennych ukrytych h^{SV} .

4. PRZYKŁAD EMPIRYCZNY

Przedmiotem analizy były notowania cen akcji spółki Żywiec w okresie od 3 stycznia 2007 do 30 czerwca 2009 roku. Wybór spółki Żywiec nie był przypadkowy, ponieważ, po pierwsze, jest to spółka, która ma stopy zwrotu zbliżone do procesu IMA(1,1), co jest konieczne abyśmy mogli rozważać model lokalnego poziomu (por. (6)-(8)), po drugie, jest to spółka o stosunkowo dużej płynności.

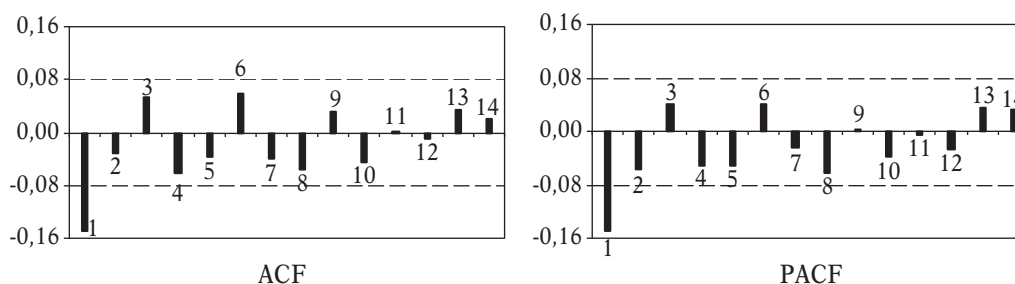
Badany szereg czasowy składał się z $T = 605$ dziennych obserwacji. Jego wykres, typowy dla spółek giełdowych, wraz z logarytmicznymi stopami zwrotu przedstawia rysunek 1. Łatwo można zauważyć, że na przełomie sierpnia i września 2007 nastąpił gwałtowny wzrost poziomu cen, osiągając maksymalną kwotę 725 zł, z kolei w następnych miesiącach widoczna jest trwała tendencja spadkowa wraz z okresowym

nasileniem zmienności. Na rysunku 2 przedstawiono wartości funkcji autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF). Wstępne wyniki wskazują, że stopy zwrotu cen spółki Żywiec cechują się niewielką, aczkolwiek istotną, ujemną autokorelacją rzędu pierwszego i brakiem autokorelacji wyższych rzędów, co może sugerować, że mamy do czynienia z realizacją procesu lokalnego poziomu.



Rysunek 1. Ceny akcji spółki Żywiec oraz ich logarytmiczne stopy zwrotu w okresie od stycznia 2007 do czerwca 2009

Źródło: obliczenia własne na podstawie informacji umieszczonych w serwisie giełdowym Domu Maklerskiego BOŚ: www.bossa.pl



Rysunek 2. Wartości funkcji autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF) dla logarytmicznych stóp zwrotu. Przerywaną linią zaznaczono dolną i górną granicę 95% przedział ufności

Źródło: obliczenia własne.

W dalszej kolejności dokonano estymacji parametrów wybranych modeli bayesowskich oraz porównano ich moc objaśniającą. Analizą objęto logarytmy cen akcji spółki Żywiec, zgodnie z formułą $y_t = 100 \ln(P_t)$, gdzie P_t oznacza cenę zamknięcia. Należy podkreślić, że za pomocą $\Delta y_t = 100 \ln(P_t) - 100 \ln(P_{t-1})$ opisano logarytmiczne stopy zwrotu, a logarytmy cen y_t traktuje się jako realizacje procesu zintegrowanego w stopniu pierwszym. Oznacza to, że w przypadku modelu lokalnego poziomu modelujemy logarytmy cen, a nie, jak to ma najczęściej miejsce w badaniach empirycznych, ich pierwsze przyrosty.

Rozważono trzy następujące modele lokalnego poziomu: LL-GARCH-Student, LL-GARCH i LL-SV. W celach porównawczych poddano dodatkowo analizie podstawowy model stochastycznej zmienności, zgodnie z równaniem:

$$\Delta y_t = \varphi_0 + \varphi_1 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2), \quad (44)$$

gdzie $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$, $\sigma_t^2 = \sigma^2 h_t$, $h_t = \exp(h_t^{SV})$, $h_t^{SV} = \rho h_{t-1}^{SV} + \zeta_t$, $\rho \in (-1, 1)$, a także $\zeta_t \sim N(0, \gamma^2)$.

Model bayesowski wymaga założeń *a priori*. Zatem dla wariancji γ^2 i σ^2 przyjęto odwrócony rozkład gamma z parametrami $c = 0,01$ i $d = 0,01$, a dla współczynników autoregresji φ_1 i ρ założono ucięty rozkład normalny o średniej 0 i odchyleniu standardowym równym 1. Również stała φ_0 ma rozkład *a priori*, będący rozkładem normalnym o średniej 0 i odchyleniu standardowym równym 1.

Tabela 3

Wartości brzegowej gęstości obserwacji, ranking modeli oraz informacje na temat liczby parametrów i procesów ukrytych w modelach LL-GARCH-Student, LL-GARCH i LL-SV

	Model			
	LL-GARCH-Student	LL-GARCH	LL-SV	SV
Brzegowa gęstość obserwacji	2,199E-65	2,789E-153	6,884E-09	3,505E-226
Ranking modeli	2	3	1	4
Liczba procesów ukrytych	3	1	3	1
Liczba parametrów	6	4	4	5

Źródło: obliczenia własne.

W tabeli 3 znajdują się wartości brzegowej gęstości wektora obserwacji, będące podstawą porównania mocy objaśniającej modeli bayesowskich (zob. [16]). Poszczególne wielkości obliczono za pomocą metody Newtona i Raftery'ego [14] na podstawie miliona cykli Gibbsa, w tym 50 tys. cykli spalonych. Dla początkowego stanu δ_0 przyjęto wartość równą 0. Wartość początkowa warunkowej wariancji jest również traktowana jako ustalona i równa $h_{szum(stan),0}^{GARCH} = 1$ dla procesu GARCH, i $h_{szum(stan),0}^{SV} = 0$ dla procesu SV.

Jak widać, pierwsze miejsce w rankingu uzyskał model LL-SV, w którym warunkowa średnia i wariancje traktowane są jako odrębne procesy ukryte. Kolejny w rankingu model to model lokalnego poziomu, w którym zakłócenia losowe $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ tworzą proces GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem *t*-Studenta. Trzecią pozycję zajął najprostszy model lokalnego poziomu, czyli LL-GARCH. Ostatnie miejsce w rankingu przypadło standardowemu modelowi SV. Czynniki Bayesa obliczone dla modelu LL-SV względem LL-GARCH-Student i LL-GARCH, przy jednakowych prawdopodobieństwach *a priori*,

wskazują, że model LL ze zmiennością stochastyczną jest o 56 rzędów wielkości lepszy niż model lokalnego poziomu z zakłóceniami losowymi typu GARCH(1,1) i warunkowym rozkładem t -Studenta i aż o 144 rzędy wielkości lepszy od podstawowego modelu LL-GARCH(1,1), z warunkowym rozkładem normalnym. Czynniki Bayesa obliczony dla modelu LL-SV względem SV wskazują, że model LL-SV jest o 217 rzędów wielkości lepszy niż podstawowy model stochastycznej zmienności. Okazuje się więc, że największą moc objaśniającą uzyskał model LL-SV, czyli taki, w którym średnią i warunkowe wariancje traktuje się jako odrębny proces stochastyczny, a nie, jak to ma miejsce w przypadku procesów AR lub GARCH jako deterministyczną funkcję przeszłości procesu.

Tabela 4

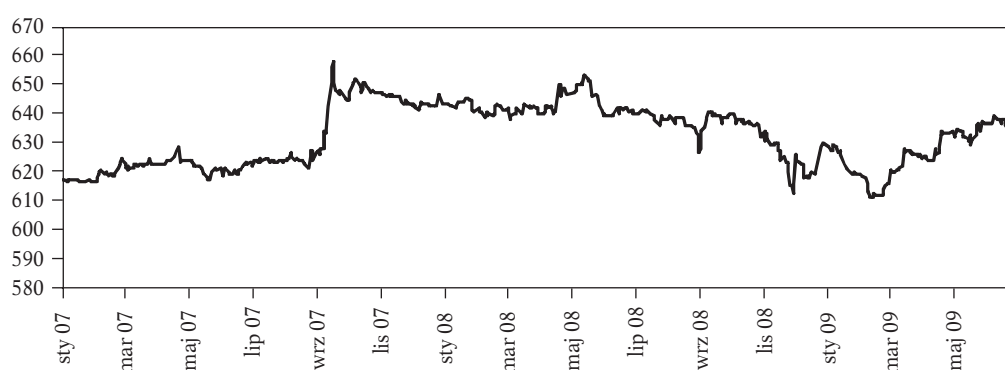
Informacje *a posteriori* o parametrach w modelach LL-GARCH-Student i LL-GARCH oraz LL-SV, obliczone dla cen akcji spółki Żywiec w okresie od stycznia 2007 do czerwca 2009

LL-GARCH-Student					
$a_{1.szum}$	$b_{1.szum}$	v_{szum}	$a_{1.stan}$	$b_{1.stan}$	v_{stan}
0,1168 (0,0694)	0,5511 (0,2817)	2,7217 (0,1942)	0,0602 (0,0224)	0,8991 (0,0471)	2,7413 (0,2049)
LL-GARCH					
0,1890 (0,0665)	0,4947 (0,1957)	–	0,1535 (0,0346)	0,7683 (0,0610)	–
LL-SV					
ρ_{szum}	γ_{szum}^2	–	ρ_{stan}	γ_{stan}^2	–
0,9855 (0,0097)	0,4287 (0,2536)	–	0,5901 (0,0897)	2,0223 (0,5098)	–
SV					
φ_0	φ_1	σ^2	ρ	γ^2	–
–0,0095 (0,0039)	–0,0051 (0,0041)	1,5789 (2,8125)	0,6979 (0,0065)	1,1898 (0,3103)	–

Źródło: obliczenia własne.

W tabeli 4 zawarto podstawowe informacje na temat rozkładów *a posteriori* estymowanych parametrów, takich jak wartość oczekiwana oraz odchylenie standardowe (umieszczone poniżej wartości oczekiwanej, w nawiasach półokrągłych). Na podstawie najbardziej prawdopodobnego modelu, czyli LL-SV, można stwierdzić, że trwałość zakłóceń losowych (szoków), w zmienności $\{\varepsilon_t\}$ jest bardzo duża, o czym świadczy wartość współczynnika autokorelacji bliska wartości jeden ($\rho_{szum} = 0,9855$). W przypadku szoków w średniej, trwałość zakłóceń jest nieco mniejsza, ponieważ współczynnik autokorelacji dla warunkowej wariancji w równaniu stanu (ρ_{stan}) wyniósł 0,5901. Ponieważ przyjęto założenie, że rozkład *a priori* dla współczynnika autoregresji jest uciętym

rozkładem normalnym z parametrem $\mu_\rho = 0,9$, uzyskane wyniki porównano z wynikami przy założeniu, że $\mu_\rho = 0$. W tym drugim przypadku wartość oczekiwana i odchylenie standardowe, dla parametru ρ_{szum} były równe odpowiednio 0,9854 i 0,0096, natomiast dla ρ_{stan} wyniosły 0,5794 i 0,0925. Jak widać (zob. tabela 4), rozkłady *a posteriori* nie różnią się zasadniczo kształtem i położeniem od rozkładów *a posteriori* obliczonych przy innych założeniach *a priori*. Oznacza to, że wstępne informacje na temat współczynnika autoregresji są silnie zdominowane przez informacje zawarte w próbie.



Rysunek 3. Mediany *a posteriori* dla δ_t ($t = 1, \dots, 605$), obliczone w modelu LL-SV

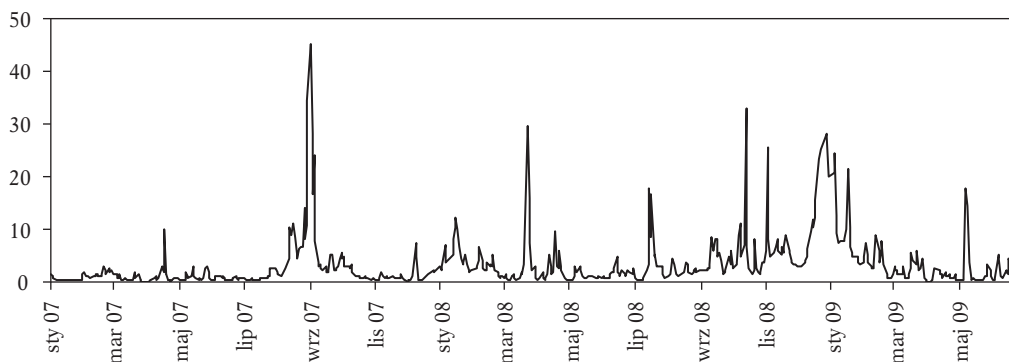
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 3 przedstawia ciąg median *a posteriori* dla zmiennej δ_t ($t = 1, \dots, 605$), obliczony w modelu LL-SV. Przedziały o najwyższej gęstości *a posteriori* miały bardzo małą rozpiętość, dlatego zrezygnowano z ich prezentacji. Mała, względna rozpiętość przedziałów *a posteriori* wskazuje na dużą precyzję oszacowania. Również nie zamieszczono na tym rysunku logarytmów cen, poddanych modelowaniu, ponieważ ich wartości bardzo mocno pokrywały się z przebiegiem median *a posteriori*. Traktowania średniej jako odrębnego procesu stochastycznego pozwala zatem na bardzo elastyczny opis dynamiki cen akcji.

Wyniki uzyskane dla parametrów struktury GARCH, w przeciwieństwie do parametrów struktury SV, wskazują na większą trwałość zakłóceń w procesie średniej, niż odchyłeń od średniej. Wartość oczekiwana *a posteriori* liczby stopni swobody, w modelu LL-GARCH-Student, w równaniu obserwacji i stanu kształtuje się na zbliżonym do siebie poziomie, tj. 2,7. Fakt, że niemal cała masa prawdopodobieństwa *a posteriori* jest skupiona poniżej wartości cztery oznacza, że dane silnie odrzucają hipotezę o istnieniu kurtozy rozkładów. Taka sytuacja wskazuje na rozkład warunkowy, wyraźnie różny od rozkładu normalnego i jednocześnie sygnalizuje występowanie obserwacji nietypowych.

Wyniki otrzymane dla podstawowego modelu stochastycznej zmienności są typowe dla finansowych szeregów czasowych o dziennej częstotliwości (por. [19]).

Rysunek 4 prezentuje przebieg median rozkładów *a posteriori* warunkowej wariancji, obliczony zgodnie ze wzorem (23). Warunkową wariancję obliczono w modelu lokalnego poziomu LL, w którym zakłócenia losowe są procesem stochastycznej zmienności.



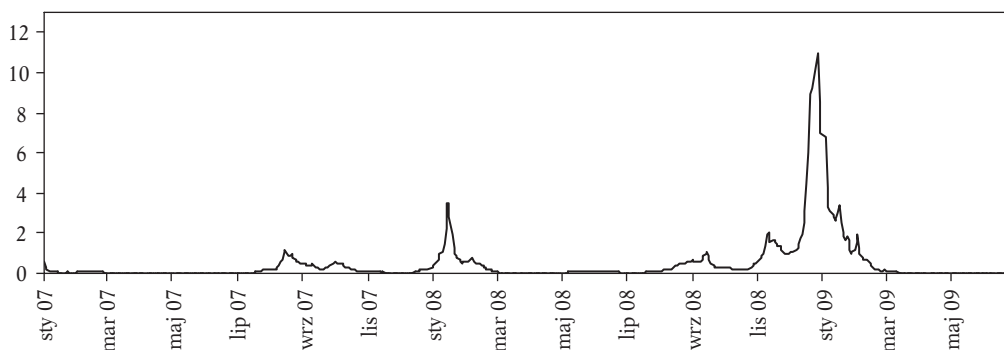
Rysunek 4. Mediany rozkładów *a posteriori* dla warunkowej wariancji $Var(\Delta y_t | \Psi_{t-1}, \theta) = \omega_t^2 + 2\sigma_t^2$, $t = 1, \dots, 605$, obliczone w modelu LL-SV

Źródło: obliczenia własne.

Jak widać na rysunku 4, w miesiącach od sierpnia do października 2007, a także od sierpnia 2008 do marca 2009 r. można zauważyć znaczący wzrost zmienności. Ponieważ we wzorze (23) można dokonać dekompozycji zmienności na dwa odrębne procesy, interesujące wydaje się wnikięcie, która zmienność, czy ta związana z odchyleniami od średniej czy też ta związana ze średnią procesu, odgrywała w tym przypadku większą rolę. Rysunek 5 opisuje przebieg median rozkładu *a posteriori* w równaniu obserwacji, czyli zawiera graficzną prezentację, jak kształtowała się zmienność odchyleń od średniej. Z kolei rysunek 6 zawiera przebieg median warunkowej wariancji w równaniu stanu, czyli w równaniu średniej procesu. Jak widać na rysunku 5, warunkowa wariancja miała stosunkowo spokojny przebieg poza nielicznymi okresami gwałtownego nasilenia zmienności. Szczególnie wyraźnie uwidacznia się to we wspomnianej już drugiej połowie 2008 r. i pierwszym kwartale 2009 r., kiedy to miało miejsce załamanie się głównych światowych indeksów giełdowych oraz bardzo silne osłabienie złotego. Obserwowana w tym okresie duża zmienność była następstwem wzrostu światowej awersji do ryzyka, słabnącym sentymentem dla krajów rozwijających się, i w konsekwencji odpływem kapitału zagranicznego z tych krajów³. Również dwa wcześniejsze, widoczne na rysunku 5, podokresy mogą być skutkiem wpływu wydarzeń na międzynarodowym rynku finansowym, ponieważ pierwsze poważne zaburzenia cen na rynku światowym pojawiły się już w sierpniu 2007, a ich następstwem była długotrwała przecena cen akcji wraz z ich silnym wzrostem zmienność⁴. Dotyczyło to zwłaszcza małych i średnich spółek, czyli m.in. spółki Żywiec. Z kolei na początku 2008 roku nastąpiło wycofywanie środków z funduszy inwestycyjnych, co zmuszało je do sprzedaży akcji i w ostateczności przyczyniło się do pogłębienia spadków i zwiększenia niepewności na rynku giełdowym.

³ Analiza sytuacji gospodarczej w krajach Europy Środkowej i Wschodniej, Raport NBP, <http://www.nbp.pl/home.aspx?f=/publikacje/nms/nms.html> (31.08.09).

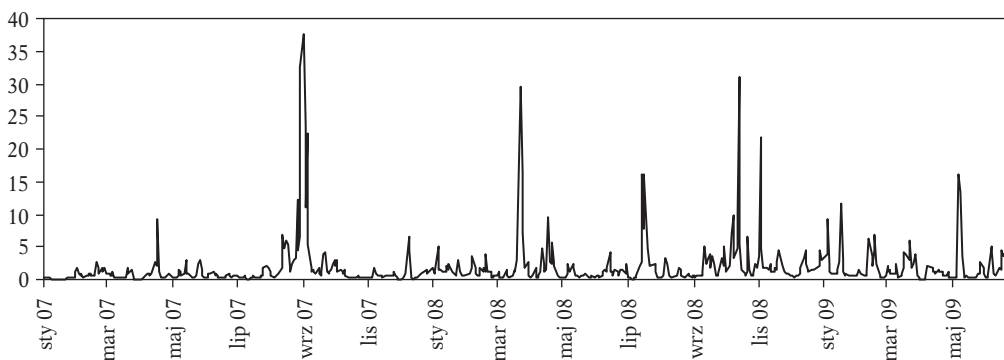
⁴ Raport o stabilności systemu finansowego – czerwiec 2008 r., Raport NBP, <http://www.nbp.pl/home.aspx?f=/systemfinansowy/stabilnosc.html> (31.08.09).



Rysunek 5. Mediany rozkładów *a posteriori* dla warunkowej wariancji w równaniu obserwacji, $\sigma_t^2 = \exp(h_{szum,t}^{SV})$, $t = 1, \dots, 605$, obliczone w modelu LL-SV

Źródło: obliczenia własne.

O ile dla odchyień od średniej łatwo można wyróżnić nieliczne podokresy znaczącego wzrostu zmienności i tym samym powiązać je z wydarzeniami na rynkach finansowych, to w przypadku zmienności samej średniej, jak pokazuje przebieg median na rysunku 6, w całym badanym okresie występowały liczne, krótkotrwałe przypadki nasilenia zmienności, których przyczyny trudno jednoznacznie ustalić. Wydaje się jednak, że przynajmniej niektóre z nich mogły być powiązane z czynnikami specyficznymi, związanymi z działalnością spółki. W przypadku Żywca jako przyczyny zwiększenia zmienności w średniej można wymienić: dobre wyniki spółki w pierwszym półroczu 2007 roku, deklaracja o skupie własnych akcji (we wrześniu 2007 i październiku 2008) oraz wypłata dywidendy (w kwietniu 2008).



Rysunek 6. Mediany rozkładów *a posteriori* warunkowej wariancji w równaniu stanu, $\omega_t^2 = \exp(h_{stan,t}^{SV})$, $t = 1, \dots, 605$, obliczone w modelu LL-SV

Źródło: obliczenia własne.

5. ZAKOŃCZENIE

W niniejszym artykule przedstawiono model lokalnego poziomu i jego bayesowską estymację. Dla parametrów w modelu LL, analityczne wyznaczenie charakterystyk rozkładów *a posteriori* jest bardzo trudne, dlatego też w prezentowanym artykule przedstawiono pełny układ rozkładów warunkowych. Do ich oszacowania stosuje się metody Monte Carlo z łańcuchami Markowa, a zwłaszcza próbnik Gibbsa połączony, niekiedy z algorytmem Metropolis i Hastingsa. Przykład empiryczny, zawarty w artykule, dotyczył modelowania szeregu cen akcji spółki Żywiec. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że modele lokalnego poziomu mają znacznie większą moc objaśniającą niż tradycyjny model stochastycznej zmienności, który zajął czwarte, ostatnie miejsce wśród rozważanych modeli. Traktowanie średniej w modelach LL, jako odrębnego procesu stochastycznego, a nie jako deterministycznej funkcji przeszłości procesu zwiększyło znacząco ich szanse *a posteriori*. Najbardziej prawdopodobny okazał się model LL-SV, czyli model, który zawiera aż trzy odrębne procesy ukryte. Przeprowadzone badania potwierdzają również traktowanie średniej jako procesu z zakłóceniami typu SV. Okazuje się więc, że zarówno w opisie odchyień od średniej, jaki i samej średniej można mówić o okresach nasilenia zmienności. Wspomniane okresowe nasilenia zmienności mogą mieć swoje uzasadnienie w zmieniających się czynnikach rynkowych.

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

LITERATURA

- [1] Bos C., [2001], *Time Varying Parameter Models for Inflation and Exchange Rates*, WebDOC, <http://citeseer.ist.psu.edu/479611.html>, (2.04.2008).
- [2] Bos C., Mahieu R.J., Dijk van H.K., [2000], *Daily exchange rate behaviour and hedging of currency risk*, „Journal of Applied Econometrics”, 15, 6, 671-696.
- [3] Doman M., Doman R., [2004], *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań.
- [4] Durbin J., Koopman S.J., [2001], *Time Series Analysis by State Space Methods*, Oxford University Press, Oxford.
- [5] Fiszeder P., [2001], *Jednorównaniowe modele GARCH – analiza procesów zachodzących na GPW w Warszawie*, materiały na V Ogólnopolskie Seminarium Naukowe pt.: Dynamiczne modele ekonometryczne, Toruń, 221-232.
- [6] Geweke J., Whiteman Ch., [2006], *Bayesian Forecasting, Handbook of Economic Forecasting*, 1, red. Elliott G., Granger C.W.J., Timmermann A., 3-78.
- [7] Grassi S., Proietti T., [2008], *Has the volatility of U.S. inflation changed and how?*, wersja niepublikowana.
- [8] Harvey A.C., [1989], *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [9] Harvey A.C., Ruiz E., Sentana E., [1992], *Unobserved component time series with ARCH disturbances*, „Journal of Econometrics”, 52, 129-157.
- [10] Kim C.J., Nelson C.R., [1999], *State-Space Models with Regime Switching*, MIT Press.
- [11] Koop G., [2003], *Bayesian Econometrics*, John Wiley & Sons.
- [12] Koop G., van Dijk H.K., [2000], *Testing for integration using evolving trend and seasonals models: A Bayesian approach*, „Journal of Econometrics”, 97, 2, 261-291.

- [13] Muth J.F., [1960], *Optimal properties of exponentially weighted forecasts*, „Journal of the American Statistical Association”, 55, 299-306.
- [14] Newton M.A., Raftery A.E., [1994], *Approximate Bayesian inference by the weighted likelihood bootstrap (with discussion)*, „Journal of the Royal Statistical Society” B, 56, 3-48.
- [15] Osiewalski J., [1991], *Bayesowska estymacja i predykcja dla jednorównaniowych modeli ekonometrycznych*, Wyd. AE w Krakowie, Kraków.
- [16] Osiewalski J., [2001], *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wyd. AE w Krakowie, Kraków.
- [17] Osiewalski J., Pajor A., Pipień M., [2004], *Bayesowskie modelowanie i prognozowanie indeksu WIG z wykorzystaniem procesów GARCH i SV*, XX Seminarium Ekonometryczne im. Profesora Zbigniewa Pawłowskiego, red. Zeliaś, A., Wyd. AE w Krakowie, Kraków, s. 17-39.
- [18] Osiewalski J., Pipień M., [1999], *Bayesowskie testowanie modeli GARCH i IGARCH*, „Przegląd Statystyczny”, 46, 1, 5-23.
- [19] Pajor A., [2003], *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, Wyd. AE w Krakowie, Kraków.
- [20] Pellegrini S., Ruiz E., Espasa A., [2007], *The relationship between ARIMA-GARCH and unobserved component models with GARCH disturbances*, „Statistics and Econometrics Series”, 7-27.
- [21] Pellegrini S., Ruiz E., Espasa A., [2008], *ARIMA-GARCH and unobserved component models with GARCH disturbances: Are their prediction intervals different?*, wersja niepublikowana, https://editorialexpress.com/cgi-bin/conference/download.cgi?db_name=simposio2008&paper_id=304, (20.04.2010).
- [22] Piłatowska M., [2003], *Modelowanie niestacjonarnych procesów ekonomicznych*, Studium metodologiczne, Wyd. UMK w Toruniu, Toruń.
- [23] Stock J.H., Watson M.W., [2007], *Why has U.S. inflation become harder to forecast?*, „Journal of Money”, Credit, and Banking, 39, 3-33.
- [24] West M., Harrison J., [1989], *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*, Springer.

Praca wpłynęła do redakcji we wrześniu 2009 r.

BAYESOWSKA ESTYMACJA MODELU LOKALNEGO POZIOMU O ROZKŁADACH DOPUSZCZAJĄCYCH WARUNKOWY ROZKŁAD t -STUDENTA I ZMIENNĄ WARIANCJĘ

Streszczenie

W artykule omówiono postać i własności modelu lokalnego poziomu, w którym zakłócenia losowe, w równaniu stanu i obserwacji, podlegają procesowi zmienności stochastycznej (SV) lub GARCH(1,1). Zasadniczym celem było opracowanie metod numerycznych wykorzystywanych w schemacie wnioskowania bayesowskiego w kontekście rozważanych modeli. Przykład empiryczny, zawarty w artykule, dotyczył wybranej spółki notowanej na GPW w Warszawie. Uzyskane wyniki wskazują, że najbardziej prawdopodobny okazał się model LL-SV, który uzyskał znaczną przewagę na standardowym modelem stochastycznej zmienności.

Słowa kluczowe: Model lokalnego poziomu, bayesowskie testowanie modeli, warunkowa heteroskedastyczność

BAYESIAN ESTIMATION OF LOCAL LEVEL MODEL WITH STUDENT- t DISTURBANCES AND TIME-VARYING CONDITIONAL VARIANCE

Summary

The paper presents the general LL (Local Level) model with time-varying conditional variance, recently proposed by Stock and Watson. The main purpose is to present the Bayesian estimation and model comparison

of different local level models with Normal GARCH, Student-t GARCH and SV disturbances. We are particularly interested how the different specifications of the conditional variance affect the explanatory power of a set of competing models. We apply the LL models to logarithmic transformations of the original prices of Żywiec, Polish company listed on the WSE. The model selection and posterior estimates provide strong evidence in favor of a model with SV disturbances in the core component, and the transitory component.

Key words: Local level model, Bayesian Model Comparison, Conditional Heteroscedasticity