

ANNA PAJOR, ARTUR PRĘDKI

ESTYMACJA MIERNIKA EFEKTYWNOŚCI TECHNICZNEJ W RAMACH METODY DEA¹

1. WSTĘP

Podstawowym zastosowaniem metody DEA jest pomiar efektywności technicznej jednostek gospodarczych, należących do grupy obiektów o zbliżonej technologii, która jest reprezentowana przez zbiór możliwości produkcyjnych (zob. [1], [2]). Możliwość ustalenia poziomu efektywności technicznej dla każdego obiektu z grupy pozwala utworzyć ranking tych jednostek oraz ustalić źródła ewentualnego braku ich efektywności. Głównymi zaletami metody DEA są (zob. [6], s. 58):

- brak konieczności parametrycznej specyfikacji zależności łączącej nakłady i produkty, czyli tzw. funkcji produkcji (dla jednego produktu) lub transformaty produkcji (dla wielu produktów, zob. [22]);

- możliwość jej zastosowania nawet przy dużej liczbie nakładów i produktów;

- prostota obliczeń (wykorzystanie programowania liniowego do obliczania wartości mierników);

- wartości nakładów i produktów mogą być wyrażone w różnych jednostkach, co więcej, zmiana jednostki danego czynnika (np. z kg na tonę) nie ma wpływu na wartość miernika (tzw. niezmienniczość miary efektywności).

Nie można jednak zapominać o jej zasadniczej wadzie, którą jest duża wrażliwość na błędne lub niekompletne dane (zob. [6], s. 59). Wynika to z deterministycznego charakteru metody, w której miernik efektywności obiektu liczony jest właśnie na podstawie danych dotyczących nakładów i produktów wybranej grupy obiektów. Co więcej, wybór owej grupy, jak i wybór nakładów i produktów użytych do analizy, jest często podyktowany dostępnością danych i zwykle nie ma pewności, że niosą one wystarczającą informację o opisywanej przez nas technologii. W deterministycznej wersji metody DEA postać zbioru możliwości produkcyjnych, reprezentującego technologię, również wyznacza się na podstawie dostępnych danych.

Zachodzi więc potrzeba modelowania owej niepewności oraz jej pomiaru (np. za pomocą miar rozproszenia, czy przedziałów ufności). Jednocześnie, chcąc zachować pierwszą z wymienionych zalet, chcielibyśmy uniknąć specyfikacji konkretnej parametrycznej zależności między nakładami a produktami. Celem niniejszej pracy jest prezentacja i ilustracja (pierwsza na gruncie polskim) propozycji modelu statystycznego

¹ Praca wykonana w ramach badań statutowych finansowanych przez Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie.

spełniającego owe wymagania². W części ósmej pracy przedstawiono własności rozważanych estymatorów dla małej próby w oparciu o symulacje. Następnie zastosowano przedstawioną metodologię do analizy poziomu efektywności rzeczywistych obiektów produkcyjnych z polskiego sektora energetycznego.

2. METODA DEA

Rozważamy grupę n jednostek produkcyjnych, o których zakładamy, że:

- stosują tę samą technologię³,
- z p nakładów wytwarzają q produktów,
- dysponujemy danymi dotyczącymi ilości tych nakładów i produktów dla każdego obiektu w grupie.

Obiekty te można przedstawić w postaci (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, gdzie $x_i = [x_i^1, \dots, x_i^p] \in R_{+0}^p$ oraz $y_i = [y_i^1, \dots, y_i^q] \in R_{+0}^q$ oznaczają, odpowiednio, wielkość nakładów oraz produktów i -tego obiektu⁴. Niech $X_n = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$ oznacza zbiór tych obiektów. Wspólna technologia reprezentowana jest za pomocą zbioru możliwości produkcyjnych:

$$T = \{(x, y) \in R_{+0}^{p+q}: z x \text{ można wyprodukować } y\}. \quad (2.1)$$

Dla dowolnego, ustalonego $x \in R_{+0}^p$ zdefiniujemy też pomocniczo zbiór:

$$T(x) = \{y \in R_{+0}^q: (x, y) \in T\}. \quad (2.2)$$

W deterministycznej wersji metody DEA zakładamy, iż zbiór możliwości produkcyjnych T można przedstawić, za pomocą dostępnych danych, w postaci⁵:

$$T(X_n) = \left\{ (x, y) \in R_{+0}^{p+q}: y \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot y_i, x \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\} \lambda_i \geq 0 \right\}. \quad (2.3)$$

Obiekt $(x_o, y_o) \in T$ nazywamy **efektywnym technicznie względem produktów**⁶, gdy niemożliwe jest (w sensie przynależności do zbioru T) proporcjonalne zwiększenie ilości jego produktów y_o i jednocześnie zachowanie ilości jego nakładów na dotychczasowym

² Autorami tej propozycji modelowania niepewności na gruncie metody DEA jest zespół naukowców skupiony wokół prof. Leopolda Simara (zob. prace [5], [8], [9], [12], [20]).

³ Założenie to zapewnia możliwość porównywania ze sobą tych jednostek np. pod względem poziomu efektywności technicznej. W zastosowaniach metody DEA staramy się więc, aby założenie to było, chociaż w przybliżeniu, spełnione. Wybieramy grupy obiektów z tej samej branży, sektora albo będące oddziałami większej jednostki gospodarczej (np. banku).

⁴ $R_{+0} = R_+ \cup \{0\}$.

⁵ Zauważmy, że zbiór ten jest wypukły i domknięty, zaś $T(x)$ jest wtedy ograniczony. Ponadto $\forall i \in \{1, \dots, n\} (x_i, y_i) \in T = T(X_n)$.

⁶ W dalszym ciągu pracy będziemy używać skróconej nazwy „obiekt efektywny technicznie”. Istnieje też tzw. efektywność techniczna względem nakładów (zob. np. [13]).

poziomie x_o . Miernikiem efektywności technicznej względem produktów dla obiektu (x_o, y_o) , gdzie $y_o \neq 0$, jest⁷:

$$\theta(x_o, y_o) = \sup \{ \theta \in R_+ : (x_o, \theta \cdot y_o) \in T \}, \quad (2.4)$$

zaś efektywny poziom produktów tego obiektu to:

$$y^\theta(x_o) = \theta(x_o, y_o) \cdot y_o. \quad (2.5)$$

Obiekt $(x, y^\theta(x))$ jest nazywany wzorcem efektywności obiektu (x, y) i nie musi być obserwowany w rzeczywistości.

W deterministycznej wersji metody DEA można też zapisać:

$$\theta(x_o, y_o) = \sup \{ \theta \in R_+ : (x_o, \theta \cdot y_o) \in T(X_n) \}. \quad (2.6)$$

Miernik efektywności technicznej ma następujące własności:

- niezmienniczość względem przyjętych jednostek nakładów i produktów;
- $\forall (x_o, y_o) \in T \theta(x_o, y_o) \geq 1$;
- $(x_o, y_o) \in T$ jest efektywny technicznie $\Leftrightarrow \theta(x_o, y_o) = 1$.

Zwróćmy uwagę, że miernik ten jest liczony dla punktu ze zbioru T i zależy od tego zbioru. Może przyjmować różne wartości w zależności od wybranego obiektu (x_o, y_o) . Jest to więc lokalna charakterystyka technologii, która obliczana jest zwykle dla n obiektów z analizowanej grupy X_n . Istota zastosowania metody DEA w tym przypadku polega na rozwiązaniu n zagadnień optymalizacyjnych z zakresu programowania liniowego:

$$\begin{aligned} \text{P.1} \quad & \theta(x_i, y_i) \rightarrow \text{MAX} \\ & \theta(x_i, y_i) \cdot y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_j, \quad x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_j, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \theta(x_i, y_i) \geq 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \text{dla } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

W wyniku uzyskujemy miernik efektywności dla każdego obiektu z grupy. Obiekty, dla których $\theta(x_i, y_i) > 1$ zostają uznane za nieefektywne, gdyż nie spełniają definicji obiektu efektywnego technicznie względem zbioru T zadanego wzorem 2.3. Sortując jednostki względem niemalejącej wartości tego miernika można otrzymać ich ranking od obiektów efektywnych do najbardziej nieefektywnych. Co więcej, interpretacja $\theta(x_i, y_i)$ dla jednostki nieefektywnej daje interesujące informacje o pożądanej strukturze produktów tej jednostki, która prowadziłaby do jej efektywności technicznej (zob. [21]). Zwróćmy jednak uwagę, że miernik ten ma charakter względny, tzn. efektywność danego obiektu mierzona jest względem wszystkich jednostek w grupie. Oznacza to w szczególności, że tak jak w przypadku zbioru możliwości produkcyjnych, wartość miernika zależy od danych, którymi dysponujemy.

⁷ Supremum istnieje ze względu na własności zbioru T (zob. przypis 5). Zapis $y_o \neq 0$ oznacza, że co najmniej jedna współrzędna wektora y_o jest niezerowa.

3. MODEL STATYSTYCZNY

Podsumowując niektóre uwagi poczynione w części drugiej można więc stwierdzić, iż zmiana zbioru \mathcal{X}_n może prowadzić do zmiany postaci zbioru $T(\mathcal{X}_n)$. Tym samym mogą zmienić się wartości mierników $\theta(x_i, y_i)$, liczone w oparciu o ten właśnie zbiór. Z sytuacją taką możemy mieć do czynienia, gdy np. część danych okaże się błędna lub nieprecyzyjna, albo gdy zdobędziemy dodatkowe dane poszerzające dotychczasowy zbiór \mathcal{X}_n o kolejne obiekty. W ramach metody DEA próbowano rozważać ten problem na różne sposoby. Począwszy od tradycyjnej analizy wrażliwości w ramach programowania liniowego (zob. [3], [4]), poprzez różnego typu modele parametryczne i semiparametryczne (zob. [7], [14], [15]), aż do modeli nieparametrycznych (zob. [5], [9], [16], [20]). Zainteresowanie autorów niniejszej pracy wzbudziła szczególnie ta ostatnia kategoria ze względu na wyrażone we wstępie pragnienie zachowania dotychczasowych zalet metody DEA. Zalicza się do nich m.in. liczenie miernika efektywności głównie w oparciu o dostępne dane i unikanie stawiania, często arbitralnych, założeń o charakterze parametrycznym.

Wprowadzamy więc odpowiedni model statystyczny (za pracami [5], [9] i [20]). Definiują go kolejne założenia, których znaczenie będzie pokrótce komentowane.

Założenie 1

O zbiorze T zakładamy, iż:

- jest wypukły i domknięty,
- w przypadku braku nakładów nie można niczego wyprodukować⁸,
- spełnia warunek tzw. swobodnej dyslokacji nakładów i produktów⁹ tzn.:

$$\forall \underline{x} \geq x, \underline{y} \leq y [(x, y) \in T \Rightarrow (\underline{x}, \underline{y}) \in T], \quad (2.2)$$

– dla dowolnego, ustalonego $x \in R_{+0}^p$ zbiór $T(x) = \{y \in R_{+0}^q : (x, y) \in T\}$ jest ograniczony.

Założenie 2

Próbę $\mathcal{X}_n = \{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$ charakteryzuje ciąg niezależnych wektorów losowych $(X_i, Y_i): R_{+0}^{p+q} \rightarrow T$ o tym samym rozkładzie i gęstości (względem miary Lebesgue'a): $f_T(x, y): R_{+0}^{p+q} \rightarrow R$, spełniającej warunek: $\forall (x, y) \in T f_T(x, y) > 0$, zaś $\forall (x, y) \notin T f_T(x, y) = 0$, czyli $\text{supp}(f_T) = T$ (nośnik funkcji).

Zbiór \mathcal{X}_n jest więc **próbą losową (prostą)** jednostek produkcyjnych. Natomiast zbiór możliwości produkcyjnych (T) jest nieznan¹⁰, ale może być estymowany. Zwróćmy

⁸ Bardziej formalnie oznacza to, że gdy x jest wektorem zerowym, natomiast y nie jest, to (x, y) nie należy do zbioru T .

⁹ Z ang. *free disposal assumption*. Nierówności między wektorami są tu rozumiane „po współrzędnych”.

¹⁰ Od tego momentu zbiór T nie może być utożsamiany ze zbiorem $T(\mathcal{X}_n)$, jak to miało miejsce w wersji deterministycznej DEA. Wprowadzając zał. 1 zachowujemy jednak jego własności zawarte w przypisie 5.

uwagę, iż przestrzenią obserwacji, czyli zbiorem potencjalnych realizacji, jest tutaj R_{+0}^{p+q} . Nie możemy bowiem wykluczyć żadnej realizacji z tego nieujemnego ortantu, ze względu na to, iż postać zbioru T nie jest znana. Funkcja $f_T(x, y)$ jest zależna od postaci zbioru T i może być przedmiotem wnioskowania statystycznego.

Założenie 3¹¹

$f_T(x, y)$ jest ciągła na T oraz $\forall (x, y) \in \text{int}T: f(x, \theta(x, y) \cdot y) > 0$.

Warunek ten oznacza, iż istnieje niezerowe prawdopodobieństwo zaobserwowania obiektów leżących w bliskim otoczeniu wzorca efektywności.

Założenie 4

$\theta(x, y)$ jest funkcją klasy $C^2(T)$.

Założenie to gwarantuje odpowiednią „gładkość” funkcji $\theta(x, y)$.

Zdefiniowany model statystyczny będziemy oznaczać krótko przez \mathcal{P} lub $\mathcal{P}(T, f_T(x, y))$. Niech \mathfrak{T} oraz Ψ będą odpowiednio rodziną zbiorów T oraz gęstości f_T , spełniających założenia modelu. Zbiór $\mathfrak{T} \times \Psi$ jest wtedy odpowiednikiem przestrzeni parametrów w modelu parametrycznym. Podstawowym zadaniem wydaje się więc estymacja nieznanego zbioru T i funkcji f_T na podstawie próby \mathcal{X}_n . Z drugiej strony nie można zapominać, iż podstawowym zastosowaniem metody DEA jest możliwość obliczenia wartości miernika efektywności technicznej $\theta(x, y)$ dla ustalonego obiektu. Te dwa cele są jednak ze sobą ściśle związane. Miernik $\theta(x, y)$ (jako funkcja) występuje przecież w modelu statystycznym (zob. zał. 4).

4. ESTYMATOR MIERNIKA EFEKTYWNOŚCI TECHNICZNEJ

Próba realizacji celów postawionych pod koniec części trzeciej stanowi treść dalszych badań autorów w tym obszarze. W niniejszej pracy skupimy się na niektórych problemach związanych z oszacowaniem wartości funkcji $\theta(\cdot, \cdot)$ w dowolnym, ustalonym punkcie¹² $(x_o, y_o) \in R_{+0}^{p+q}$. Przypomnijmy w tym miejscu jej definicję (zob. wzór 2.4):

$$\theta(x_o, y_o) = \sup \{ \theta \in \mathbb{R}_+ : (x_o, \theta \cdot y_o) \in T \}.$$

Zauważmy, że $\theta(x_o, y_o)$ zależy od nieznanego zbioru T .

Estymatorem nieznanego zbioru możliwości produkcyjnych T jest:

$$\hat{T}(\mathcal{X}_n) = \left\{ (x, y) \in R_{+0}^{p+q} : y \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Y_i, x \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot X_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\} \lambda_i \geq 0 \right\}. \quad (4.1)$$

¹¹ Symbol $\text{int}T$ oznacza wnętrze zbioru T .

¹² Cały czas obowiązuje założenie $y_o \neq 0$ (zob. przypis 7).

Warto przypomnieć, że w wersji deterministycznej DEA pojedyncza realizacja zbioru $\hat{T}(X_n)$ jest utożsamiana ze zbiorem $T(T(X_n))$, zob. wzór 2.3). W przypadku stochastycznej wersji tej metody tak nie jest (zob. przypis 10). Wykazano jednak, iż zbiory te są ze sobą ściśle związane. Po pierwsze, **realizacja** ciągu wektorów losowych (X_i, Y_i) (tj. (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$) należy do zbioru T (zob. zał. 2). Realizacja zbioru $\hat{T}(X_n)$ jest niewątpliwie, na mocy swej konstrukcji, najmniejszym zbiorem spełniającym założenia modelu mówiące, że $(x_i, y_i) \in T(X_n)$ (dla $i = 1, \dots, n$) (zob. przypis 5). Skoro tak, to oczywiście realizacja $\hat{T}(X_n)$ zawiera się w zbiorze T . Po drugie, wykazano, czego nie będziemy tu szerzej omawiać, iż $\hat{T}(X_n)$ jest efektywnym estymatorem zbioru T w sensie ryzyka minimaxowego (szczegóły można znaleźć w pracach [10], [11]).

Estymatorem DEA¹³ wartości funkcji $\theta(\cdot, \cdot)$ w punkcie $(x_o, y_o) \in R_{+0}^{p+q}$ nazywamy statystykę $\hat{\theta}(x_o, y_o)$, zdefiniowaną następująco:

$$\hat{\theta}(x_o, y_o) = \sup\{\theta \in R_+ : (x_o, \theta \cdot y_o) \in \hat{T}(X_n)\}. \quad (4.2)$$

Skoro X_n jest ciągiem wektorów losowych, to $\hat{\theta}(x_o, y_o)$ jako ich funkcja (poprzez zbiór losowy $\hat{T}(X_n)$) może być nazywana statystyką i jako taka pełnić rolę estymatora wartości¹⁴ $\theta(x_o, y_o)$. Udowodniono zgodność tego estymatora (w każdym ustalonym punkcie $(x_o, y_o) \in R_{+0}^{p+q}$) oraz ustalono tzw. szybkość jego zbieżności według rozkładu (zob. [8]). W części piątej pracy zajmiemy się szczegółowo innym, ważnym, choć cząstkowym rezultatem. Mianowicie przy $p = q = 1$ (dla jednego nakładu i jednego produktu) wyprowadzono postać asymptotycznego rozkładu związanego ściśle z różnicą $\hat{\theta}(x_o, y_o) - \theta(x_o, y_o)$ (zob. [5]). Jeśli głównym zastosowaniem DEA jest ocena wartości miernika efektywności technicznej, to chcielibyśmy określić błąd związany z tym oszacowaniem (choćby asymptotyczny). Rezultat ten pozwala na konstrukcję asymptotycznych miar rozproszenia i odpowiednich przedziałów ufności.

5. ASYMPTOTYCZNY ROZKŁAD ESTYMATORA DEA

Na początek wprowadzimy pewne oznaczenia i notację. Przyjmujemy, w dalszym ciągu pracy, iż $p = q = 1$. Skoro zbiór T jest wypukły i $T(x)$ ograniczony (zob. zał. 1), to „ograniczenie górne” T może być opisane monotoniczną, mierzalną, wklęsłą funkcją $y = g(x)$ (funkcją produkcji, $g: R_{+0} \rightarrow R$), a więc:

$$T = \{(x, y) \in R_{+0}^2 : y \leq g(x)\}. \quad (5.1)$$

Z drugiej strony, dla danego $x_o \in R_{+0}$:

$$g(x_o) = \sup\{y \in R_{+0} : (x_o, y) \in T\}. \quad (5.2)$$

¹³ Z ang. *DEA-estimator*. W literaturze polskiej jednakże funkcjonuje w takiej sytuacji szyk przestawny (np. piszemy raczej estymator MNK, a nie MNK-estymator).

¹⁴ Skoro $T(X_n) \subseteq T$, to z definicji $\hat{\theta}(x_o, y_o) \leq \theta(x_o, y_o)$. Oczywiście, gdyby $T(X_n) = T$ to $\hat{\theta}(x_o, y_o) = \theta(x_o, y_o)$.

Estymatorem DEA $g(x_o)$ jest:

$$\hat{g}(x_o) = \sup\{y \in R_{+0} : (x_o, y) \in \hat{T}(X_n)\}. \quad (5.3)$$

Dla $y_o \neq 0$ zachodzą proste, lecz istotne zależności:

$$\theta(x_o, y_o) = g(x_o)/y_o \text{ oraz } \hat{\theta}(x_o, y_o) = \hat{g}(x_o)/y_o. \quad (5.4)$$

Interesujący nas rezultat przedstawia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1

Niech $p = q = 1$ i spełnione są założenia modelu statystycznego wprowadzonego w części trzeciej pracy. Dodatkowo niech $g''(x_o) < 0$.

$$\text{Wówczas: } \forall z < 0: P\left\{n^{2/3} \cdot (b_0^2/b_2)^{1/3} \cdot [\hat{g}(x_o) - g(x_o)] \leq z\right\} = \int_0^{\infty} \varphi(u, z) du + o(1),$$

$$\text{gdzie } \begin{aligned} \varphi(u, z) &= 0,5 (-z)^{3/2} (1 + u^2) \exp[-1/6 \cdot (-z)^{3/2} \cdot (u + u^{-1})^3], \\ b_0 &= f_T(x_o, g(x_o)), \quad b_2 = -0,5g''(x_o) \text{ (nieznane parametry)}^{15}. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że druga pochodna funkcji g istnieje i jest niedodatnia (wynika to z założeń 1 i 4 modelu statystycznego oraz wzorów 5.4). Twierdzenie to przedstawiono w pracy [20], zaś dowód znajduje się w opracowaniu [5], gdzie powyższa postać jest modyfikacją twierdzenia głównego. Korzystając ze wspomnianych wzorów 5.4, można też zapisać tezę tego twierdzenia dla bardziej interesującej nas różnicy $\hat{\theta}(x_o, y_o) - \theta(x_o, y_o)$:

$$\forall z < 0: P\left\{n^{2/3} \cdot (b_0^2/b_2)^{1/3} \cdot y_o \cdot [\hat{\theta}(x_o, y_o) - \theta(x_o, y_o)] \leq z\right\} = \int_0^{\infty} \varphi(u, z) du + o(1). \quad (5.5)$$

Bardzo istotny jest również wniosek wynikający z twierdzenia 1, a mówiący o postaci asymptotycznych miar obciążenia i rozproszenia estymatora $\hat{g}(x_o)$.

Wniosek 1

$$\text{Bas.}(\hat{g}(x_o)) = -n^{-2/3} (b_2/b_0^2)^{1/3} c_1 \text{ (obciążenie),}$$

$$\text{Var}^{\text{as.}}(\hat{g}(x_o)) = n^{-4/3} (b_2/b_0^2)^{2/3} c_2 \text{ (wariancja),}$$

$$\text{MSE}^{\text{as.}}(\hat{g}(x_o)) = n^{-4/3} (b_2/b_0^2)^{2/3} (c_1^2 + c_2) \text{ (błąd średniokwadratowy).}$$

$$\text{gdzie } c_1 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(u, -z) du dz = 2 \cdot 6^{2/3} \cdot \Gamma(2/3)/9 \approx 0,99360$$

¹⁵ $o(1)$ to wyrażenie dążące do zera przy $n \rightarrow \infty$ (nie zależy od z). Brak kolejności w numeracji parametrów w tezie wynika z faktu, że w dowodzie twierdzenia występuje jeszcze jeden niejawni parametr $b_1 = g'(x_o)$ (zob. [5], s. 227).

$$c_2 = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} z \varphi(u, -z) du dz - c_1^2 = 4 \cdot 6^{1/3} \cdot \Gamma(1/3)/15 - c_1^2 \approx 0,31088.$$

Znak obciążenia jest ujemny, ponieważ rzeczywista wartość funkcji produkcji $g(x_o)$ jest zawsze większa bądź równa od oceny¹⁶ $\hat{g}(x_o)$. Jeśli przeanalizujemy wyrażenie b_2/b_0^2 to widać, że na zwiększenie obciążenia lub wariancji może wpłynąć mniejsza wartość gęstości w punkcie $(x_o, g(x_o))$ (co można związać z mniejszą pewnością zaistnienia realnego obiektu w otoczeniu tego punktu) lub „większa” krzywizna g w punkcie x_o ($\hat{g}(x_o)$ jako funkcja x_o jest tylko przedziałami liniowa, więc nie jest zbyt „gładka”).

6. ESTYMACJA NIEZNANYCH PARAMETRÓW

Zarówno w twierdzeniu 1, jak i we wniosku 1 występują nieznanne parametry b_0 oraz b_2 . Zachodzi więc potrzeba ich estymacji, co wprowadza kolejny „szum” do asymptotycznych rezultatów przedstawionych w części piątej. Niech (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, oznacza realizację wektorów losowych (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$.

6.1. ESTYMACJA b_0

Dla dowolnego $x_o \in R_{+0}$ i $\delta > 0$ definiujemy zbiór:

$$S(\delta) = (x_o - \delta/2; x_o + \delta/2) \times R. \quad (6.1)$$

Następnie definiujemy zbiór:

$$D = S(\delta) \cap T(X_n) \cap \{(x, y): y \geq \hat{g}(x_o) - \delta/2\}. \quad (6.2)$$

Estymatorem $b_0 = f_T(x_o, g(x_o))$ jest:

$$\hat{b}_0 = \#\{(x_i, y_i) \in D\} \cdot [n\lambda(D)]^{-1}, \quad (6.3)$$

gdzie $\lambda(D)$ jest miarą Lebesgue'a zbioru D .

6.2 ESTYMACJA b_2

Dla dowolnego, ustalonego $h > 0$ oraz $w \in R$ niech:

l_w^L – oznacza odcinek łączący $(x_o, \hat{g}(x_o))$ z $(x_o - h/2, w)$,

l_w^R – oznacza odcinek łączący $(x_o, \hat{g}(x_o))$ z $(x_o + h/2, w)$.

¹⁶ Wynika to z definicji tych pojęć oraz wspomnianego już faktu, iż $T(X_n) \subseteq T$.

Definiujemy teraz odpowiednio:

$$\begin{aligned} Z^- &= \max\{w: \exists 1 \leq i \leq n: (x_i, y_i) \in l_w^L\} \text{ oraz } Z^+ = \\ &= \max\{w: \exists 1 \leq i \leq n: (x_i, y_i) \in l_w^R\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

A następnie:

$$Z_1^- = \min\{Z^-, \hat{g}(x_o - h/2)\} \text{ oraz } Z_1^+ = \min\{Z^+, \hat{g}(x_o + h/2)\}. \quad (6.5)$$

Gdy dla ustalonego h żaden punkt (x_i, y_i) nie leży w pasie $(x_o - h/2, x_o) \times R$, to Z^- nie jest określone. Wtedy przyjmujemy $Z_1^- = \hat{g}(x_o + h/2)$. Analogicznie, gdy w pasie $(x_o, x_o + h/2) \times R$ nie znajduje się żaden punkt (x_i, y_i) , to $Z_1^+ = \hat{g}(x_o + h/2)$.

W kolejnym kroku dobieramy wielomian drugiego stopnia g_1 przechodzący przez punkty:

$$(x_o - h/2, Z_1^-); (x_o, \hat{g}(x_o)); (x_o + h/2, Z_1^+).$$

Warto w tym miejscu podkreślić, że konstrukcja wielomianu drugiego stopnia, przechodzącego przez punkty:

$$(x_o - h/2, \hat{g}(x_o - h/2)); (x_o, \hat{g}(x_o)); (x_o + h/2, \hat{g}(x_o + h/2)),$$

nie jest skuteczna, gdyż w większości praktycznych przypadków punkty te są współliniowe.

Estymatorem $b_2 = -0,5g''(x_o)$ jest:

$$\hat{b}_2 = -0,5g_1''(x_o). \quad (6.6)$$

Zauważmy, że punkty $(x_o - h/2, Z_1^-), (x_o + h/2, Z_1^+)$ leżą „poniżej” wykresu funkcji $\hat{g}(\cdot)$ (poza przypadkiem współliniowości z $(x_o, \hat{g}(x_o))$, o którym wspomnieliśmy powyżej). Stąd, na mocy wklęsłości $\hat{g}(\cdot)$, wynika wklęsłość g_1 . Oznacza to, że znak estymatora \hat{b}_2 jest nieujemny.

Konstrukcjom opisanym w częściach 6.1 i 6.2 pracy nadaje sens kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 2 (zob. [5], s. 223)

Niech spełnione będą założenia twierdzenia 1 oraz $\exists \varepsilon_1 \in (0, 1/3) \exists \varepsilon_2 \in (0, 1/2)$:
 $h \sim n^{-1/3 + \varepsilon_1}, \delta \sim n^{-1/2 + \varepsilon_2}$.

Wówczas \hat{b}_0, \hat{b}_2 są zgodnymi estymatorami, odpowiednio, b_0 i b_2 .

7. ASYMPTOTYCZNY PRZEDZIAŁ UFNOŚCI

Na mocy przytoczonego wcześniej wniosku 1 skorygowany o obciążenie estymator $g(x_o)$ ma postać:

$$\tilde{g}(x_o) = \hat{g}(x_o) + n^{-2/3} (\hat{b}_2 / \hat{b}_0^2)^{1/3} c_1. \quad (7.1)$$

Asymptotyczny przedział ufności dla wartości $g(x_o)$ wynika z przybliżonej równości:

$$P\left[\hat{g}(x_o) - n^{-2/3} (\hat{b}_2 / \hat{b}_0^2)^{1/3} z_{1-\alpha/2} \leq g(x_o) \leq \hat{g}(x_o) - n^{-2/3} (\hat{b}_2 / \hat{b}_0^2)^{1/3} z_{\alpha/2}\right] \approx^{as.} 1 - \alpha \quad (7.2)$$

lub w wersji „skorygowanej”:

$$P\left[\tilde{g}(x_o) - n^{-2/3} (\hat{b}_2 / \hat{b}_0^2)^{1/3} (z_{1-\alpha/2} + c_1) \leq g(x_o) \leq \tilde{g}(x_o) - n^{-2/3} (\hat{b}_2 / \hat{b}_0^2)^{1/3} (z_{\alpha/2} + c_1)\right] \approx^{as.} 1 - \alpha. \quad (7.3)$$

Gdzie $z_{1-\alpha/2}$ oraz $z_{\alpha/2}$ oznaczają kwantyle odpowiedniego rozkładu z twierdzenia 1, tzn.:

$$\int_0^{\infty} \varphi(u, z_{\alpha/2}) du = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{n^{2/3} \cdot (b_0^2 / b_2)^{1/3} \cdot [\hat{g}(x_o) - g(x_o)] < z_{\alpha/2}\right\} = \alpha/2, \quad (7.4)$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(u, z_{1-\alpha/2}) du = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{n^{2/3} \cdot (b_0^2 / b_2)^{1/3} \cdot [\hat{g}(x_o) - g(x_o)] \leq z_{1-\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha/2. \quad (7.5)$$

Powyższe całki są przybliżane za pomocą metod całkowania numerycznego. Postać funkcji $\varphi(u, z)$ wyklucza analityczne metody obliczeń.

8. BADANIA SYMULACYJNE I EMPIRYCZNE

Celem prowadzonych symulacji jest analiza skończenie-próbkowych własności estymatorów $\hat{g}(x_o)$, $\tilde{g}(x_o)$ oraz ich zachowanie przy zwiększaniu liczebności próby. Wykorzystane zostaną, wprowadzone już wcześniej, miary rozproszenia, histogramy interesujących nas wielkości oraz stopień pokrycia nieznannej wartości $g(x_o)$ przez odpowiednie przedziały ufności. Na koniec przedstawione zostaną wyniki uzyskane dla danych rzeczywistych. Obliczenia wykonano przy użyciu autorskich procedur napisanych w programie Gauss 8.0.

8.1 WYNIKI SYMULACJI

Za pracą [5] rozważamy dwa modele symulacyjne.

MODEL 1

$$X \sim U[0,1], Y = g(X) \cdot \exp(-V), g(x) = x^{1/2}, V \sim \text{Exp}(3),$$

gdzie V i X są niezależnymi zmiennymi losowymi, natomiast $\text{Exp}(\lambda)$ oznacza rozkład wykładniczy ze średnią $1/\lambda$.

Przyjmujemy więc dla uproszczenia, iż nakład jedynego czynnika produkcji obiektu może przyjmować wartości z przedziału $[0,1]$, nie preferujemy jednak *a priori* żadnej z tych wartości. Funkcja g pełni rolę klasycznej, potęgowej funkcji produkcji. Przy czym nie tylko ona ma wpływ na obserwowaną wielkość produkcji obiektu. Innym, niezależnym czynnikiem jest tu nieefektywność techniczna, którą w modelu uwzględniono w postaci zmiennej losowej $\exp(-V)$. Jest on (dla każdej konkretnej realizacji zmiennych x_o, v_o) nie większy od jedności, a tym samym zrealizowana wielkość produkcji obiektu y_o nie jest większa niż wartość funkcji produkcji $g(x_o)$ (zob. np. [22] oraz wzór 5.1). Zmienna losowa V ma rozkład wykładniczy z parametrem odwrotności skali (λ) równym 3. Im wyższa wartość tego parametru, tym większe prawdopodobieństwo zaobserwowania wartości „w pobliżu” grafu funkcji produkcji (zob. komentarz do zał. 3). Fakt ten ma duże znaczenie dla dowodu zgodności estymatora $\hat{g}(x_o)$ oraz przy estymacji nieznanymi parametrów b_0, b_2 . Stąd dla porównania rozważamy również model, w którym wartość parametru odwrotności skali w rozkładzie wykładniczym jest dużo mniejsza.

MODEL 2

$$X \sim U[0,1], Y = g(X) \cdot \exp(-V), g(x) = x^{1/2}, V \sim \text{Exp}(1),$$

gdzie V i X są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Dla każdego z modeli rozważamy próby 100, 500 oraz 1000 elementowe i na ich podstawie estymujemy wartość funkcji produkcji $g(\cdot)$ w trzech różnych punktach odcinka $[0,1]$, będącego dziedziną gęstości brzegowej zmiennej X ($x_o = 0,25, x_o = 0,5$ oraz $x_o = 0,75$). Wartości parametrów wygładzających przyjęto częściowo arbitralnie, lecz tak, by spełniały one założenia twierdzenia 2: $\delta = 2n^{-1/2}, h = 2n^{-1/3}$. Liczba wygenerowanych prób (symulacji) dla każdego z problemów estymacyjnych wynosi $N = 500$. We wszystkich przypadkach obliczono wartości średnie:

$$\bar{g}(x_o) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \hat{g}^{(s)}(x_o) \text{ oraz } \tilde{g}(x_o) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \tilde{g}^{(s)}(x_o), \quad (8.1)$$

gdzie $\hat{g}^{(s)}(x_o)$ i $\tilde{g}^{(s)}(x_o)$ oznaczają, odpowiednio, wartość estymatora DEA oraz jego wersji skorygowanej, obliczone w s -tej symulacji. Obliczono również błąd średniokwadratowy oraz odchylenie standardowe $\hat{g}(x_o)$ ze wzoru¹⁷:

$$\sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{s=1}^N [\hat{g}^{(s)}(x_o) - \bar{g}(x_o)]^2}. \quad (8.2)$$

¹⁷ Analogiczny wzór stosujemy dla wersji skorygowanej zastępując „daszek” „falką”.

Wyniki symulacji dla modeli 1 i 2 przedstawiono w tabeli 1. Zawiera ona w każdej komórce kolejno:

- średnie obciążenie estymatora, odpowiednio, $\hat{g}(x_o)$ i $\bar{g}(x_o)$ (zob. wniosek 1),
- odchylenie standardowe estymatorów $\hat{g}(x_o)$ i $\bar{g}(x_o)$,
- błąd średniokwadratowy estymatora, odpowiednio, $\hat{g}(x_o)$ i $\bar{g}(x_o)$.

Tabela 1

Średnie obciążenie ($\times 10^{-2}$), odchylenie standardowe ($\times 10^{-4}$) i błąd średniokwadratowy ($\times 10^{-4}$) odpowiednich estymatorów

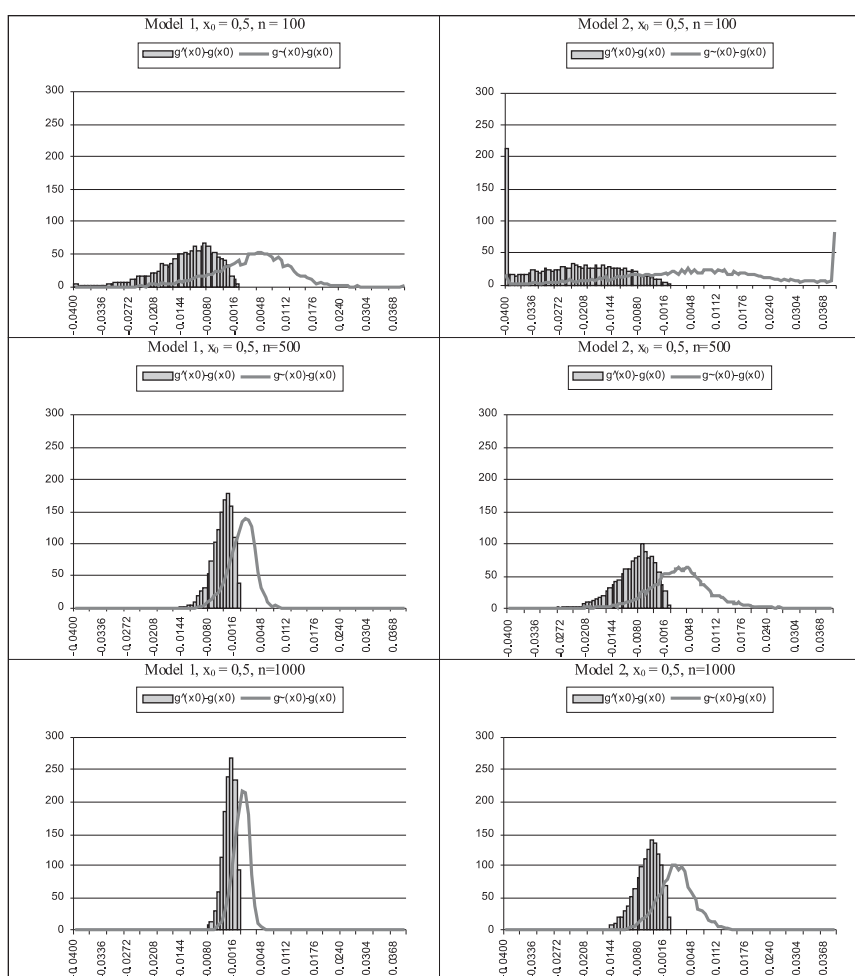
	$x_o = 0,25$				$x_o = 0,5$				$x_o = 0,75$			
	M1		M2		M1		M2		M1		M2	
	\hat{g}	\bar{g}	\hat{g}	\bar{g}	\hat{g}	\bar{g}	\hat{g}	\bar{g}	\hat{g}	\bar{g}	\hat{g}	\bar{g}
$n = 100$	-1,437	0,440	-2,960	0,235	-1,256	0,295	-2,638	0,560	-1,285	0,500	-3,101	0,863
	3,675	4,325	6,930	8,908	3,102	4,398	6,455	9,312	3,488	4,555	9,422	12,390
	2,738	1,127	11,157	4,015	2,058	1,052	9,041	4,640	2,260	1,286	14,046	8,405
$n = 500$	-0,449	0,080	-1,009	0,054	-0,422	0,064	-0,889	0,265	-0,398	0,081	-0,869	0,517
	1,131	1,367	2,479	3,468	1,034	1,361	2,118	3,205	1,006	1,496	2,317	3,772
	0,266	0,100	1,325	0,603	0,232	0,096	1,015	0,583	0,209	0,118	1,023	0,977
$n = 1000$	-0,299	0,020	-0,603	0,067	-0,268	0,040	-0,555	0,181	-0,261	0,055	-0,529	0,305
	0,778	0,867	1,433	1,905	0,649	0,857	1,437	2,136	0,645	0,921	1,393	2,298
	0,119	0,038	0,466	0,185	0,093	0,038	0,411	0,261	0,089	0,045	0,376	0,357

Źródło: opracowanie własne.

Po pierwsze, zwróćmy uwagę, że wraz ze wzrostem liczby obserwacji (n) odpowiednie miary rozproszenia oraz obciążenie zbliżają się do 0. Potwierdza to zgodność estymatorów $\hat{g}(x_o)$ i $\bar{g}(x_o)$ (zob. tw. 1). Po drugie, widoczne jest, iż zarówno średnie obciążenie, rozproszenie, jak i błąd średniokwadratowy rozważanych estymatorów w modelu 2 są, co do wartości bezwzględnej, większe niż w modelu 1. Potwierdza to wzmiankowany wcześniej fakt, że estymacja w modelu 2 jest mniej precyzyjna ze względu na dużo mniejszą liczbę obserwacji położoną w pobliżu wykresu funkcji produkcji g . Po trzecie, zwróćmy uwagę, że korekta estymatora $\hat{g}(x_o)$ o obciążenie powoduje zmniejszenie średniego obciążenia i błędu średniokwadratowego. Zwiększa się jednak odchylenie standardowe $\bar{g}(x_o)$. Oznacza to, że korekta o obciążenie powoduje zwiększenie rozproszenia ocen $g(x_o)$. To zwiększone rozproszenie wynika z konieczności szacowania nieznanymi parametrów b_0, b_2 . Po czwarte, widoczna jest zależność wartości odpowiednich estymatorów od krzywizny funkcji produkcji. Dla funkcji produkcji postaci $g(x) = x^{1/2}$ krzywizna jest największa w pobliżu zera. Wraz ze wzrostem krzywizny¹⁸, zwiększeniu (co do wartości bezwzględnej) ulegają wszystkie trzy wielkości zilustrowane w tabeli 1. Wystarczy porównać te wielkości dla $x_o = 0,25$ (stosunkowo

¹⁸ Mierzonej wartością drugiej pochodnej g w odpowiednim punkcie.

blisko 0) z odpowiadającymi im wartościami dla $x_o = 0,5$ lub $0,75$. Zwróćmy jednak uwagę, że gdybyśmy chcieli rozróżnić, pod tym kątem, wyniki dla $x_o = 0,5$ oraz $x_o = 0,75$ sprawa już nie jest tak klarowna. Dopiero przy większej liczbie obserwacji (u nas równej 500 lub 1000) uwidoczni się rola krzywizny¹⁹. Wynika to z ogólnie znanego faktu, iż wraz ze wzrostem x_o krzywizna funkcji $x^{1/2}$ maleje, początkowo gwałtownie (blisko zera), lecz potem spadek ten nie jest już tak gwałtowny. Po piąte, estymator $\hat{g}(x_o)$ oczywiście niedoszacowuje rzeczywistej wartości $g(x_o)$ (wartość obciążenia jest ujemna). Sytuacja zmienia się po korekcie o obciążenie. Następuje przeszacowanie wartości $g(x_o)$, ale dużo mniejsze (co do wartości bezwzględnej) niż wcześniejsze niedoszacowanie.



Rysunek 1. Histogramy rozkładów $\hat{g}(0,5) - g(0,5)$ oraz $\tilde{g}(0,5) - g(0,5)$

Źródło: opracowanie własne.

¹⁹ Charakterystyki estymatorów dla $x_o = 0,5$ są większe, co do wartości bezwzględnej, od tych samych charakterystyk dla $x_o = 0,75$, ale tylko dla $n = 500$ lub 1000 .

W celu pełniejszej ilustracji wyników, omówionych w poprzednim akapicie, przedstawiamy histogramy rozkładów $\hat{g}(0,5) - g(0,5)$ oraz $\tilde{g}(0,5) - g(0,5)$. Ich postać jest widoczna na rysunku 1, w zależności od liczby obserwacji (n) i rodzaju modelu. W tym przypadku przeprowadzono 5000 symulacji.

Zwróćmy uwagę, że wraz ze wzrostem liczby obserwacji w obu modelach histogramy stają się bardziej wysmukłe i mniej rozproszone. Potwierdza to uwagi poczynione uprzednio, a związane ze zgodnością odpowiednich estymatorów. Ponadto warto też zauważyć, iż w modelu 2 odpowiednie histogramy są bardziej rozproszone i mniej skupione wokół modalnej niż w modelu 1. Potwierdza to uwagi o trudnościach w estymacji w ramach modelu 2. Z rysunków widać, iż histogramy rozkładu estymatora skorygowanego $\tilde{g}(x_o)$ są bardziej rozproszone niż odpowiednie histogramy rozkładu estymatora $\hat{g}(x_o)$. We wszystkich przypadkach, z powodu korekty o obciążenie, są też bardziej przesunięte w prawo. Korekta ta powoduje, jak już było wspomniane, większe rozproszenie estymatora $\tilde{g}(x_o)$.

Obliczono również realizacje asymptotycznych przedziałów ufności dla $g(x_o)$, przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ i $x_o = 0,5$ (zob. wzór 7.3). Rozważono oba modele i wykonano 500, a następnie 5000 symulacji, równolegle biorąc pod uwagę próby 100, 500 oraz 1000 elementowe. Pokrycie rzeczywistej wartości $g(0,5)$ przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2

Pokrycie rzeczywistej wartości $g(0,5)$ przez realizacje asymptotycznego przedziału ufności dla $\alpha = 0,05$

	$N = 500$		$N = 5000$	
	M1	M2	M1	M2
$n = 100$	0,906	0,902	0,913	0,896
$n = 500$	0,908	0,906	0,891	0,895
$n = 1000$	0,910	0,910	0,898	0,895

Źródło: opracowanie własne.

Nie zaobserwowano wzrostu stopnia pokrycia zarówno wraz ze wzrostem liczby obserwacji, jak i wraz ze wzrostem liczby symulacji. Szczególnie niepokojące jest to z punktu widzenia liczby obserwacji. Skoro są to realizacje **asymptotycznych** przedziałów ufności, być może zbieżność pokrycia do teoretycznej wartości 0,95 następuje przy dużo większej liczbie obserwacji²⁰. Powodem może być też niepewność wynikająca z szacowania nieznanymi parametrów b_0 , b_2 . Nie zaobserwowano również, aby stopień pokrycia $g(x_o)$ w modelu 1, teoretycznie łatwiej estymowalnego, był większy niż w modelu 2. Przeprowadzono podobne symulacje dla $x_o = 0,25$ oraz $x_o = 0,75$, stopień pokrycia $g(x_o)$ był zbliżony. Wydaje się więc, że krzywizna funkcji produkcji g nie odgrywa w tym przypadku znaczącej roli.

²⁰ Liczba obserwacji większa niż 1000 jest i tak nieużyteczna z punktu widzenia praktycznego zastosowania metody DEA.

8.2 ILUSTRACJA EMPIRYCZNA

Jako ilustrację empiryczną przedstawiamy wyniki uzyskane dla danych rzeczywistych z roku 1995, dotyczących 32 polskich elektrowni i elektrociepłowni. Jest to grupa jednostek produkcyjnych, dla których przeanalizowano stopień efektywności technicznej i jego rozproszenie. Jako jedyny nakład przyjęto kapitał liczony wartością brutto środków trwałych (x_i w zł)²¹. Produktem działalności jednostek jest natomiast wytworzona energia (y_i liczona w TJ²²). Dla uproszczenia analizy do obliczeń wzięto logarytmy tych wielkości²³ i przyjęto oznaczenia $\underline{x}_i = \ln x_i$ oraz $\underline{y}_i = \ln y_i$ ($i = 1, \dots, 32$). Przyjmując za x_o kolejne \underline{x}_i (jak to najczęściej bywa w praktycznych zastosowaniach DEA) i korzystając z programu liniowego P.1, obliczono wartości estymatora miary efektywności technicznej dla poszczególnych obiektów. Następnie, w oparciu o zależności opisane we wzorach 5.4 i 7.1, obliczono wartości estymatorów $\hat{g}(x_o)$ i $\bar{g}(x_o)$. Wyniki te zebrano w tabeli 3, gdzie umieszczono również logarytmy rozważanych danych oraz realizacje 95% asymptotycznych przedziałów ufności (zob. wzór 7.3).

Tabela 3

Logarytm wielkości kapitału (\underline{x}_i) i produkcji (\underline{y}_i), wartości odpowiednich estymatorów, końce asymptotycznych przedziałów ufności

i	\underline{x}_i	\underline{y}_i	$\hat{\theta}(\underline{x}_i, \underline{y}_i)$	$\hat{g}(\underline{x}_i)$	$\bar{g}(\underline{x}_i)$	L	P
1	2	3	4	5	6	7	8
1	10,99705	8,056141	1	8,056141	x	x	x
2	11,08609	7,569928	1,077355	8,155497	x	x	x
3	11,26047	8,107991	1,029858	8,350079	8,867839	8,440072	9,546514
4	11,45214	8,275529	1,034853	8,563958	9,034749	8,645787	9,651858
5	11,62027	8,394958	1,042479	8,751563	9,25235	8,838606	9,908776
6	11,83614	8,497133	1,058292	8,992446	9,28595	9,043461	9,670672
7	12,00512	8,405703	1,092235	9,181003	9,45642	9,228873	9,817434
8	12,16236	8,419338	1,111306	9,356459	9,701397	9,416413	10,15354
9	12,23909	9,22219	1,023844	9,44208	9,834953	9,510367	10,34993
10	12,32511	9,453514	1,008944	9,538068	9,969169	9,612999	10,53425
11	12,6791	8,784162	1,130793	9,933069	10,02393	9,948862	10,14302
12	12,68296	8,977412	1,106931	9,937379	10,03028	9,953526	10,15205

²¹ Dane wielonakładowe (dostępne np. w pracy [13]). Ze względu na założenie: $p = q = 1$, rozważania ograniczono do jednego nakładu.

²² 1GWh = 3,6TJ (teradžul).

²³ Analogicznie zresztą jak w źródłowej pracy [5]. Zmniejsza to znacząco rozproszenie wartości danych i pozwala lepiej zilustrować działanie metody DEA w ramach wprowadzonego modelu statystycznego.

cd. tabeli 3

i	x_i	y_i	$\hat{\theta}(x_i, y_i)$	$\hat{g}(x_i)$	$\bar{g}(x_i)$	L	P
1	2	3	4	5	6	7	8
13	12,71478	9,228681	1,08064	9,972882	10,06739	9,989309	10,19127
14	12,84077	9,591588	1,113835	10,13698	10,36912	10,17733	10,67341
15	12,84363	9,63683	1,049791	10,11666	10,34765	10,15681	10,65042
16	12,86184	9,100972	1,054411	10,11347	10,34437	10,1536	10,64703
17	12,94949	9,149156	1,118658	10,23478	10,51175	10,28292	10,8748
18	12,99786	9,706785	1,059956	10,28876	10,56579	10,33691	10,92892
19	13,21364	9,911476	1,062359	10,52954	10,73523	10,56529	11,00485
20	13,28765	9,718404	1,091961	10,61212	10,83261	10,65044	11,12162
21	13,55388	10,9092	1,116817	10,93488	11,32771	11,00316	11,84262
22	13,62764	9,791114	1	10,9092	11,3192	10,98046	11,85662
23	13,76503	10,44455	1,067569	10,98411	11,28095	11,0357	11,67006
24	13,769	10,2889	1,051526	10,98272	11,27896	11,03421	11,66727
25	13,93473	10,37862	1,063901	11,04181	11,38241	11,10101	11,82885
26	13,95774	10,42618	1,059815	11,04983	11,41651	11,11356	11,89714
27	14,05469	10,25895	1,080383	11,08359	11,46566	11,15	11,96649
28	14,15775	10,84933	1,0249	11,11947	11,53554	11,19179	12,08092
29	14,31546	10,26171	1,08894	11,17439	11,38152	11,21039	11,65303
30	14,67309	10,43387	1,082908	11,29892	11,655	11,36081	12,12175
31	15,3091	11,52039	1	11,52039	12,47837	11,6869	13,73409
32	15,71262	9,889977	1,164855	11,52039	11,94631	11,59442	12,5046

Źródło: opracowanie własne.

Obiekty o nr 1, 22 i 31 zostały uznane za efektywne technicznie, ponieważ $\hat{\theta}(x_i, y_i) = 1$.

Dla pozostałych obiektów miara ta jest również stosunkowo bliska jedności, co oznacza, że są one wprawdzie nieefektywne, ale w niewielkim stopniu. Przykładowo, dla jednostki nr 32 wartość miary $\hat{\theta}(x_{32}, y_{32})$ jest największa i wynosi 1,164855. Oznacza to, że logarytm wielkości produkcji można zwiększyć o ponad 16% bez zmiany obecnej wartości kapitału. Największe, technologicznie możliwe do uzyskania, logarytmy produkcji dla poszczególnych obiektów to $\hat{g}(x_i)$, czyli kolumna piąta tabeli 3. Na przykład dla obiektu nr 32 $\hat{g}(x_{32}) = 11,52039 = y_{32} \cdot \hat{\theta}(x_{32}, y_{32})$. Powstaje więc ona poprzez wymnożenie kolumny 3 i 4 po wierszach (zgodnie ze wzorami 5.4).

W kolejnych kolumnach tabeli przedstawiono wyniki związane z zastosowaniem estymatora DEA. Kolumna szósta tabeli to „optymalne” wartości logarytmów produkcji z kolumny piątej skorygowane o ocenę obciążenia liczoną według wzoru z wniosku 1. Obciążenie to ma znak ujemny, więc wartości $\bar{g}(x_i)$ są przesunięte „na prawo” w stosunku do wartości $\hat{g}(x_i)$. Przy obliczaniu oceny obciążenia popełniamy błędy związane z szacowaniem nieznanymi parametrów b_0 i b_2 . W tym miejscu należy zwrócić uwagę na stosunkowo arbitralny wybór stałych δ i h . W twierdzeniu 2 zawarte są zalecenia co do ich wyboru, zapewniające zgodność estymatorów \hat{b}_0 i \hat{b}_2 , ale dla tak małej próby nie da się ich zrealizować. Przy wielkościach δ i h , sugerowanych we wspomnianym twierdzeniu²⁴, może się bowiem okazać, że dla niektórych obiektów z próby zbiór D jest pusty (zob. wzór 6.2). Jest to spowodowane stosunkowo dużą „rzadkością” chmury danych empirycznych²⁵. Niestety, niepustość tego zbioru jest warunkiem koniecznym dla obliczenia wartości estymatora \hat{b}_0 . Stąd zarówno w źródłowej pracy [5], jak i w tym opracowaniu stałe te dobrano tak, by były one jak najbliżej przedziału (0,1) (zob. przypis 24), a jednocześnie tak, by obliczenia były wykonalne. Co więcej, obiekty nie są rozłożone równomiernie (zob. rys. 2), stąd konieczność nie tylko arbitralnego doboru stałych, ale także zmiany ich wartości w zależności od tego, w którym „regionie” danych się znajdujemy. Ostatecznie przyjęto²⁶:

$$\begin{aligned} \delta &= 2, h = 0,5 \text{ dla } i = 3,4, \\ \delta &= 2, h = 1 \text{ dla } i = 5, \dots, 25, \\ \delta &= 4, h = 2 \text{ dla } i = 26, \dots, 32. \end{aligned}$$

Niestety, nie udało się znaleźć sensownych (bliskich 1) wartości δ i h dla obiektów²⁷ o nr 1 i 2, stąd brak niektórych wartości w tabeli 3.

W ostatnich dwóch kolumnach tabeli 3 znajdują się wartości lewych i prawych końców realizacji asymptotycznych 95% przedziałów ufności dla rzeczywistych wartości $g(x_i)$. Dają one pewną informację, ile mogłaby wynosić dla danego obiektu optymalna wartość funkcji produkcji – szczególnie wobec faktu, że przedziały te okazały się stosunkowo wąskie. Maksymalna różnica P – L dla obiektu nr 31 wynosi około 2,047, co stanowi nieco ponad 17,5% wartości skorygowanego estymatora²⁸ $\bar{g}(x_{31})$. Do obliczonych realizacji należy jednak podchodzić z dużą ostrożnością. Po pierwsze, przy tak małej próbie korzystanie ze wzorów o charakterze asymptotycznym może skutkować dość dużym błędem. Po drugie, wspomniany już arbitralny dobór stałych δ i h wpływa na ocenę obciążenia, a tym samym na szerokość odpowiednich przedziałów.

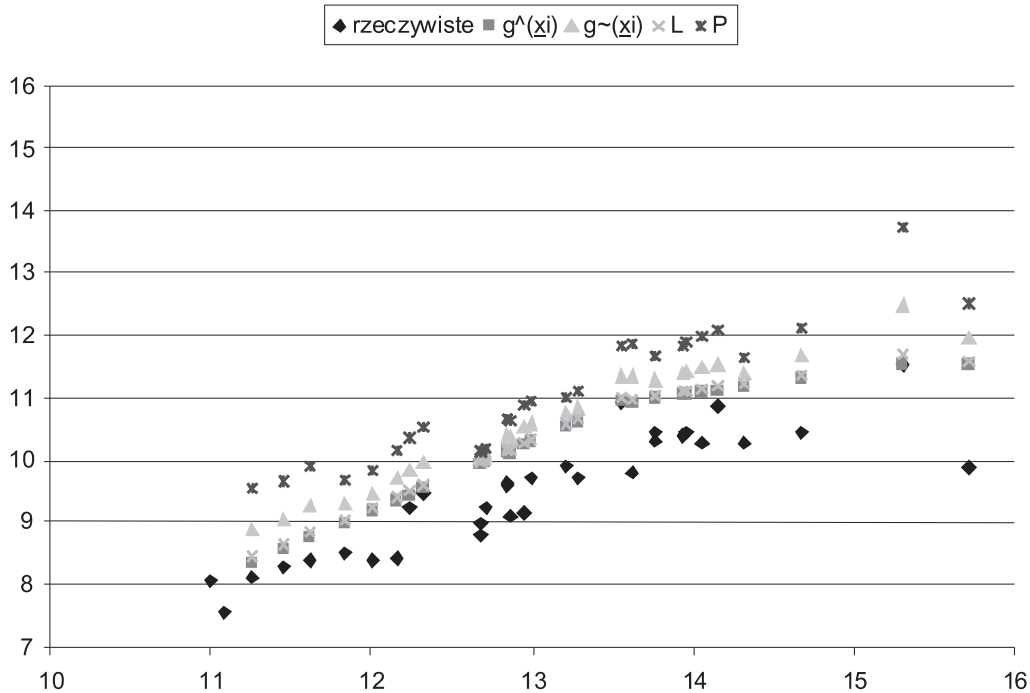
²⁴ Z tw. 2 wynika m.in., iż δ i h powinny należeć do przedziału (0,1).

²⁵ Stosunkowo duże odległości między obiektami powodują, że pewne zbiory pełniące rolę topologicznych otoczeń są puste.

²⁶ Dane w tabeli ponumerowane są wg rosnącego logarytmu kapitału. Regiony są więc tworzone właśnie względem tej wartości.

²⁷ Ten sam problem występuje w źródłowej pracy [5].

²⁸ Jest to oczywiście mocno nieformalny pomiar precyzji przedziałów ufności.



Rysunek 2. Wyniki zastosowania estymatora DEA w badaniu efektywności technicznej jednostek produkcyjnych

Źródło: opracowanie własne.

Patrząc na rysunek 2 widzimy, że realizacje przedziałów ufności są nieco węższe w środkowym „regionie”, gdzie punkty empiryczne są bliżej siebie (odpowiada to mniej więcej regionowi dla $i = 5, \dots, 25$, gdzie $\delta = 2, h = 1$). Zwróćmy też uwagę, że wartości estymatorów $\hat{g}(x_i)$ leżą poza skorygowanymi realizacjami przedziałów ufności. Łatwo przeliczyć, że ta sama sytuacja występuje dla nieskorygowanych realizacji (zob. wzór 7.2). Jest to konsekwencja ujemności kwantyli $z_{0,975}, z_{0,025}$. W głębszym zaś sensie ponownie wracamy do uwag poczynionych pod wnioskiem 1, mówiących o tym, że rzeczywista wartość $g(x_i)$ nie może leżeć poniżej wartości $\hat{g}(x_i)$, zaś rozbieżność między tymi wartościami świadczy o występowaniu nieefektywności technicznej.

9. PODSUMOWANIE

W niniejszej pracy przedstawiono propozycję modelowania niepewności dotyczącej postaci zbioru możliwości produkcyjnych oraz szacowania stopnia nieefektywności technicznej w ramach metody DEA, z zachowaniem jednocześnie zalet tej metody (o których była mowa we wstępie pracy). Propozycja ta jest nieznaną szerzej na gruncie polskim, ale obecną w literaturze światowej (zob. [5], [8], [9], [20]). Z przedstawionych w tej

pracy wstępnych badań wynika, że ze względu na asymptotyczny charakter własności stosowanych estymatorów prezentowana metoda daje dobre wyniki w przypadku dużej liczby obserwacji (zob. część symulacyjna artykułu), choć i wtedy nie jest pozbawiona usterek (np. niepełny stopień pokrycia przedziałów ufności, zob. tabela 2). Niestety, w praktycznych zastosowaniach metody DEA mamy najczęściej do czynienia ze zbiorami danych, które nie przekraczają 100 czy 200 obserwacji. W takiej sytuacji pojawia się kolejny problem związany z obliczaniem oceny obciążenia, a dokładniej, dotyczący wykonalności estymacji nieznanymi parametrów b_0 i b_2 oraz zbyt arbitralnego i dyskusyjnego wyboru pewnych stałych służących wspomnianej estymacji.

W małych próbach, przy braku jakichkolwiek rezultatów teoretycznych, postuluje się więc użycie metod bootstrapowych mających za zadanie „naśladować” rzeczywisty proces generujący dane. W literaturze przedmiotu nie brakuje propozycji w tym zakresie (zob. prace [17], [19], [20]). Niestety, do roku 2007 nie udowodniono nawet zgodności tych procedur²⁹, udowodniono natomiast niezgodność niektórych procedur zaproponowanych w latach poprzednich (zob. np. [18]). W roku 2008 pojawiła się jednak praca [9], w której zaproponowano pewne zgodne procedury bootstrapowe. Co więcej, przedstawiono w niej postać asymptotycznego rozkładu dla estymatora DEA w sytuacji wielu nakładów i produktów. Jej przeanalizowanie i zastosowanie będzie następnym zadaniem stojącym przed autorami niniejszego opracowania.

Kolejnym wyzwaniem będzie uzyskanie podobnych wniosków (wyników) dla estymatora miernika efektywności względem nakładów (zob. np. [20]). W niniejszej pracy badamy bowiem tzw. efektywność względem produktów (zob. wzór 2.4). W celach porównawczych i dla osiągnięcia szerszej perspektywy spojrzenia na problem modelowania niepewności w ramach metody DEA, należałoby również zbadać i wykorzystać inne propozycje modeli o charakterze semiparametrycznym i parametrycznym (zob. prace [7], [14], [15]).

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

LITERATURA

- [1] Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W., [1984], *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in DEA*, Management Science, Vol. 30 (No. 9), s. 1078-1091.
- [2] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E., [1978], *Measuring the efficiency of decision making units*, European Journal of Operations Research, Vol. 2, s. 429-444.
- [3] Charnes A., Neralić L., [1989], *Sensitivity analysis in Data Envelopment Analysis – Part 1 i 2*, Glasnik Matematički, Vol. 24 (No. 44), s. 211-226 oraz 449-463.
- [4] Charnes A., Neralić L., [1992], *Sensitivity analysis in Data Envelopment Analysis – Part 3*, Glasnik Matematički, Vol. 27 (No. 47), s. 191-201.
- [5] Gijbels I., Mammen E., Park B.U., Simar L., [1999], *On estimation of monotone and concave frontier function*, „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 94, s. 220-228.
- [6] Gospodarowicz M., [2000], *Procedury analizy i oceny banków*, Materiały i Studia NBP.
- [7] Grosskopf S., [1996], *Statistical inference and nonparametric efficiency: a selective survey*, „Journal of Productivity Analysis”, Vol. 7, s. 161-176.

²⁹ Własności podstawowej procedury bootstrapowej oznaczającej, że naśladuje ona w miarę dokładnie generowanie danych przez prawdziwy proces, przynajmniej asymptotycznie (przy dużej liczbie obserwacji).

- [8] Kneip A., Park B.U., Simar L., [1998], *A Note on the convergence of nonparametric DEA estimators for production efficiency scores*, *Econometric Theory*, Vol. 14, s. 783-793.
- [9] Kneip A., Simar L., Wilson P.W., [2008], *Asymptotics and consistent bootstraps for DEA estimators in nonparametric Frontier Models*, *Econometric Theory*, Vol. 24, s. 1663-1697.
- [10] Korostelev A.P., Simar L., Tsybakov A.B., [1995], *Efficient estimation of monotone boundaries*, „*The Annals of Statistics*”, Vol. 23, s. 476-489.
- [11] Korostelev A.P., Simar L., Tsybakov A.B., [1995], *On estimation of monotone and convex boundaries*, *Publications de l'Institut de Statistique des Universités de Paris XXXIX*, Vol. 1, s. 3-18.
- [12] Park B.U., Simar L., Weiner Ch., [2000], *The FDH estimator for productivity efficiency scores*, *Econometric Theory*, Vol. 16, s. 855-877.
- [13] Prędko A., [2003], *Analiza efektywności za pomocą metody DEA: podstawy formalne i ilustracja ekonomiczna*, „*Przegląd Statystyczny*”, Vol. 50 (No. 1), s. 87-100.
- [14] Sengupta J.K., [1990], *Transformations in stochastic DEA models*, „*Journal of Econometrics*”, Vol. 46, s. 109-123.
- [15] Simar L., [1992], *Estimating efficiencies from Frontier Models with panel data: a comparison of parametric, non-parametric and semi-parametric methods with bootstrapping*, „*Journal of Productivity Analysis*”, Vol. 3, s. 167-203.
- [16] Simar L., [1996], *Aspects of statistical analysis in DEA-type Frontier Models*, „*Journal of Productivity Analysis*”, Vol. 7, s. 177-185.
- [17] Simar L., Wilson P.W., [1998], *Sensitivity analysis of efficiency scores: how to bootstrap in nonparametric frontier models*, *Management Science*, Vol. 44, s. 49-61.
- [18] Simar L., Wilson P.W., [1999], *Some Problems with the Ferrier/Hirschberg Bootstrap Idea*, „*Journal of Productivity Analysis*”, Vol. 11, s. 67-80.
- [19] Simar L., Wilson P.W., [2000], *A general methodology for bootstrapping In nonparametric frontier models*, „*Journal of Applied Statistics*”, Vol. 27, s. 779-802.
- [20] Simar L., Wilson P.W., [2000] *Statistical Inference in Nonparametric Frontier Models: The State of the Art*, „*Journal of Productivity Analysis*”, Vol. 13, s. 49-78.
- [21] Sueyoshi T., [1997], *Measuring Efficiencies and Returns to Scale of Nippon Telegraph...*, *Management Science*, Vol. 43 (No. 6), s. 779-796.
- [22] Varian H.R., [1992], *Microeconomic Analysis*, W.W. Norton & Company, Inc.

Praca wpłynęła do redakcji w lipcu 2009 r.

ESTYMACJA MIERNIKA EFEKTYWNOŚCI TECHNICZNEJ W RAMACH METODY DEA

Streszczenie

W artykule przedstawiono propozycję opisu niepewności, co do wartości miernika efektywności technicznej, uzyskiwanej za pomocą metody DEA. Wprowadzono nieparametryczny model statystyczny, funkcjonujący w ramach omawianej metody oraz zdefiniowano tzw. estymator DEA miernika efektywności technicznej. W przypadku jednego nakładu i jednego produktu powiązano wartość miernika efektywności technicznej z wartością funkcji produkcji w punkcie oraz zdefiniowano odpowiadający jej estymator DEA. Następnie przedstawiono postać asymptotycznego rozkładu obu estymatorów DEA. Znajomość tego rozkładu pozwoliła wyznaczyć asymptotyczne obciążenie i wariancję estymatora DEA oraz wyprowadzić postaci odpowiednich asymptotycznych przedziałów ufności. Na koniec wykonano badania symulacyjne, mające na celu sprawdzenie małopróbkowych własności estymatora DEA oraz zastosowano przedstawioną metodologię do analizy poziomu efektywności rzeczywistych obiektów produkcyjnych z polskiego sektora energetycznego.

Słowa kluczowe: metoda DEA, efektywność techniczna, rozkład asymptotyczny, nieparametryczny model graniczny.

ESTIMATION OF THE TECHNICAL EFFICIENCY MEASURE WITHIN THE DEA METHOD

Summary

In the paper we present the proposition of the description of uncertainty related to the technical efficiency measure received using the DEA method. A nonparametric, statistical model functioning within the DEA method is introduced and the DEA estimator of the technical efficiency measure is defined. For a single input – single output variable case, the value of the technical efficiency measure and frontier production function are related. Thus a corresponding DEA frontier estimator for a given point is defined. Next, forms of the asymptotic distributions of the DEA estimators are presented. It allowed us to derive the asymptotic bias and variance of the DEA estimator and to construct asymptotic confidence intervals. In the last part, finite sample performance of the DEA estimator is investigated via a simulation study. We also illustrate the DEA estimation procedure using real data, which come from the Polish Energy Sector.

Key words: DEA method, technical efficiency, asymptotic distribution, nonparametric Frontier Model.