

JAN PURCZYŃSKI

METODY PROGNOZOWANIA Z WYKORZYSTANIEM TRENDU POTĘGOWEGO

1. WSTĘP

Praca dotyczy estymacji parametrów nieliniowych modeli trendu i stanowi, w pewnym sensie, kontynuację zagadnień rozpatrzonych w pracy [6], gdzie omówiono metody estymacji parametrów trendu wykładniczego dla celów predykcji. Natomiast niniejsza praca jest poświęcona metodom estymacji parametrów trendu potęgowego na potrzeby procesu prognostycznego.

Celem badań zaprezentowanych w artykule jest wyznaczenie postaci wzorów przybliżonych umożliwiających estymację parametrów trendu potęgowego posiadających zbliżone właściwości, do oszacowania parametrów uzyskanych MNK w odniesieniu do modelu I (wzór (1)). W celu określenia przydatności tych wzorów wykonano symulacje komputerowe. Ponadto zostanie wyprowadzony wzór określający błąd *ex ante* prognozy uzyskanej MNK dla trendu potęgowego.

Ze względu na charakter składnika losowego, rozpatrzone zostaną trzy modele:

– Model addytywny (Model I)

$$y_t = A \cdot t^B + \varepsilon a_t \text{ gdzie } t = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

– Model multiplikatywny (Model II)

$$y_t = A \cdot t^B \cdot e^{\varepsilon m_t} \quad (2)$$

– Model mieszany (Model III)

$$y_t = A \cdot t^B \cdot e^{\varepsilon m_t} + \varepsilon a_t \quad (3)$$

gdzie:

εa_t – składnik losowy o rozkładzie $N(0, \sigma a)$

εm_t – składnik losowy o rozkładzie $N(0, \sigma m)$

y_t – dane empiryczne.

W przypadku modelu II zalecana jest metoda transformacji liniowej [5, 7], polegająca na logarytmowaniu równania (2):

$$\ln(y_t) = \ln(A) + B \cdot \ln(t) + \varepsilon m_t. \quad (4)$$

Stosując MNK do równania (4), otrzymuje się następujące oszacowania parametrów B i A :

$$BL = \frac{\sum_{t=1}^n L_t (t' - \bar{t}')}{\sum_{t=1}^n (t' - \bar{t}')^2}; \quad AL = \exp(\bar{L} - BL \cdot \bar{t}') \quad (5)$$

gdzie: $L_t = \ln(y_t)$; $\bar{L} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n L_t$; $t' = \ln(t)$; $\bar{t}' = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n t'$;

AL .; BL – oszacowania parametrów A i B .

Dla modelu addytywnego (model I) zalecana jest MNK w odniesieniu do równania (1), w wyniku czego, uzyskuje się układ równań:

$$\sum_{t=1}^n y_t \cdot t^{BS} \ln(t) \cdot \sum_{t=1}^n t^{2BS} = \sum_{t=1}^n y_t \cdot t^{2BS} \cdot \sum_{t=1}^n t^{2BS} \ln(t) \quad (6a)$$

$$AS = \frac{\sum_{t=1}^n y_t \cdot t^{BS}}{\sum_{t=1}^n t^{2BS}}, \quad (6b)$$

gdzie: AS i BS oznaczają oszacowania parametrów A i B uzyskane MNK.

W celu wyznaczenia oszacowania BS należy rozwiązać równanie (6a) metodą numeryczną [2]. Następnie, z równania (6b) oblicza się oszacowanie AS .

Omawiając zagadnienie szacowania parametrów nieliniowych funkcji regresji, do których zalicza się funkcja potęgowa, autorzy podręczników i zbiorów zadań zwracają uwagę na ograniczenia stosowania transformacji logarymicznej wynikające z założenia postaci modelu multiplikatywnego (wzór (2)) [4]. W pracy [3] autorzy dodatkowo podkreślają dwa inne problemy związane ze stosowaniem transformacji: brak przeniesienia własności estymatora $\ln(A)$ (wzór (4)) na estymator parametru A oraz nierównoważność kryteriów MNK stosowanej do funkcji krzywoliniowej (wzór (2)) i funkcji zlogarytmowanej (wzór (4)). W związku z czym, w pracy [3] proponuje się rozwiązanie układu równań (6) za pomocą arkusza kalkulacyjnego np. Microsoft Excel.

Jak już wspomniano powyżej, w niniejszej pracy zostaną zaproponowane wzory przybliżone umożliwiające estymację parametrów trendu potęgowego.

2. UPROSZCZONA METODA SZACOWANIA PARAMETRÓW TRENDU POTĘGOWEGO

Załóżmy, że dla modelu addytywnego (1) została wyznaczona postać teoretyczna \hat{y}_t :

$$\hat{y}_t = \hat{A} \cdot t^{\hat{B}} \quad (7)$$

gdzie: \hat{A} i \hat{B} oznaczają oszacowania parametrów trendu.

Punktem wyjścia jest różnica symetryczna

$$\hat{y}_{t+1} - \hat{y}_{t-1}. \quad (8)$$

Ze wzoru (7) i (8), otrzymuje się:

$$\hat{y}_{t+1} - \hat{y}_{t-1} = \hat{A} \cdot t^{\hat{B}} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\hat{B}} - \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\hat{B}} \right]. \quad (9)$$

Stosując rozwinięcie w szereg potęgowy [2]:

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (10)$$

i uwzględniając trzy pierwsze wyrazy szeregu (10) oraz zależność (7), wzór (9) przyjmuje postać:

$$\hat{y}_{t+1} - \hat{y}_{t-1} = 2\hat{B} \cdot \frac{\hat{y}_t}{t}. \quad (11)$$

W celu zmniejszenia wpływu składnika losowego, wykonuje się obustronne sumowanie we wzorze (11), uzyskując:

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n-1} (y_{t+1} - y_{t-1})}{2 \sum_{t=2}^{n-1} \frac{y_t}{t}}. \quad (12)$$

Mnożąc równanie (11) przez t , oraz sumując obustronnie, uzyskuje się:

$$\hat{B}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n-1} (y_{t+1} - y_{t-1}) \cdot t}{2 \sum_{t=2}^{n-1} y_t}. \quad (13)$$

Poprawnym sposobem estymacji parametru B jest metoda najmniejszych kwadratów, która zastosowana do wzoru (11), prowadzi do zależności:

$$\hat{B}_3 = \frac{\sum_{t=2}^{n-1} (y_{t+1} - y_{t-1}) \cdot \frac{y_t}{t}}{2 \sum_{t=2}^{n-1} \left(\frac{y_t}{t}\right)^2}. \quad (14)$$

Oszacowanie parametru A uzyskuje się ze wzoru (6b):

$$\hat{A}_j = \frac{\sum_t y_t \cdot t^{B_j}}{\sum_t t^{2B_j}}; j = 1, 2, 3, \quad (15)$$

gdzie: \hat{B}_j określają wzory (12), (13), (14).

3. WYNIKI SYMULACJI KOMPUTEROWYCH

W celu oceny przydatności proponowanych wzorów przybliżonych wykonano szereg symulacji komputerowych dla różnych wartości parametrów A i B oraz liczby obserwacji n . Poniżej zostaną zamieszczone wyniki dla $A = 20$, $n = 7$ oraz $B = 0,5$ i $B = 1,5$ oraz dla okresu prognozowania $T = 8, 9, 10$. Przy określonym poziomie składnika losowego wykonywano $M = 5000$ symulacji z użyciem generatora liczb losowych o rozkładzie normalnym, obliczając zgodnie ze wzorami (1)-(3) wartości obserwacji $y_{m,t}$. Dla każdej symulacji wyznaczano wartość prognozy $YP_{m,T}$:

$$YP_{m,T} = \hat{A}_m \cdot T^{\hat{B}_m} \quad (16)$$

gdzie:

$m = 1, 2 \dots, M$ – numer kolejnej symulacji,

\hat{A}_m i \hat{B}_m – oszacowania parametrów trendu dla poszczególnych symulacji,

T – okres prognozy.

Analogicznie określano wartość realizacji zmiennej prognozowanej $YR_{m,T}$, podstawiając do wzorów (1)-(3) $t = T$. Do oceny jakości prognozy zastosowano błąd względny prognozy *ex post* b_T :

$$b_T = \frac{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (YP_{m,T} - YR_{m,T})^2}}{Y\bar{R}_T} \cdot 100 \quad (17)$$

gdzie: $Y\bar{R}_T = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M YR_{m,T}$.

Zakładając zgodność wariancji błędu spowodowanego obecnością składnika losowego dla modelu I i modelu II, w pracy [5] podano zależność pomiędzy wartością odchylenia standardowego σa i σm . Dla małych wartości σm zachodzi wzór przybliżony:

$$\sigma m = \frac{\sigma a}{\sqrt{E(yd^2)}}, \quad (18)$$

gdzie: $E(yd^2) = \frac{A^2}{n} \sum_{t=1}^n t^{2B}$.

Wykonując symulacje, uruchamiano generator liczb losowych o rozkładzie $N(0, \sigma a)$, a następnie dla modelu I, ze wzoru (1) obliczano wartości y_t . Przy realizacji modelu II określano równoważną wartość odchylenia standardowego σm zgodnie ze wzorem (18). Model mieszany (III) był realizowany zgodnie ze wzorem:

$$y_t = A \cdot t^B \cdot e^{\frac{\varepsilon m_t}{\sqrt{2}}} + \frac{\varepsilon a_t}{\sqrt{2}}. \quad (19)$$

W celu rozwiązania równania (6a), stosowano metodę bisekcji (połowienia), która w odróżnieniu od metody siecznych i metody stycznych, daje gwarancję zbieżności procesu iteracyjnego [2].

Przy określonym poziomie składnika losowego (σa), wartość błędu prognozy *ex post* zależy od wartości parametrów trendu A i B. W celu ograniczenia wpływu wartości parametrów funkcji potęgowej dokonano normalizacji, wprowadzając względną wartość poziomu składnika losowego σv :

$$\sigma v = \frac{\sigma a}{\bar{y}}; \text{ gdzie: } \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t. \quad (20)$$

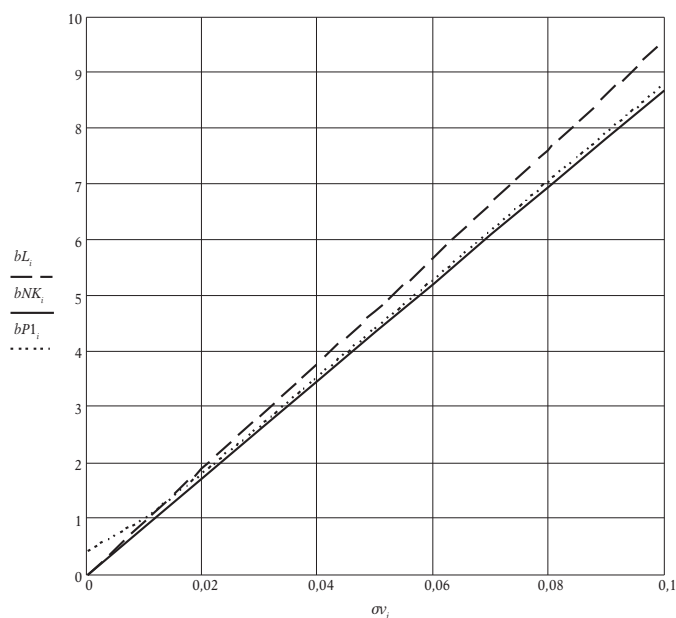
W wyniku normalizacji, dla wszystkich symulacji komputerowych, parametr σv należał do tego samego przedziału zmienności [0 – 0,1].

W pierwszej kolejności wykonano symulacje dla addytywnego modelu składnika losowego – wzór (1): $A = 20$, $B = 0,5$, $n = 7$, okres prognozy $T = 8$. Spośród trzech metod przybliżonych najmniejszym błędem *ex post* charakteryzuje się metoda I (wzory (12), (15), (17)). Metoda przybliżona III (wzory (14), (15), (17)) prowadzi do błędu *ex post* stanowiącego 1,015 wartości błędu metody I. Najgorzej wypada metoda II (wzory (13), (15), (17)), dla której błąd *ex post* wynosi 1,043 wartości błędu metody I.

Wszystkie rysunki zamieszczone w pracy przedstawiają wartości błędu względnego *ex post* (wyrażonego w procentach) w funkcji poziomu składnika losowego σv .

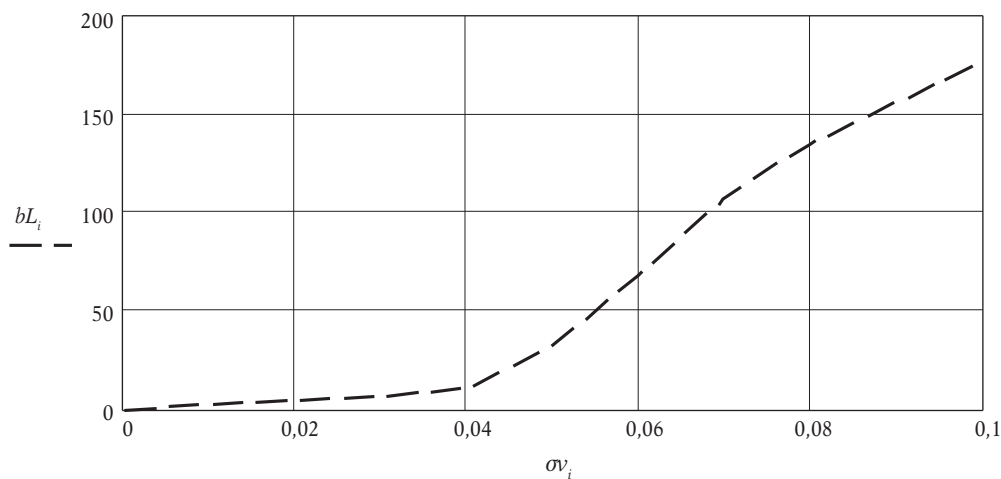
Na rysunku 1 porównano wartości błędu *ex post* uzyskane dla następujących metod: *bL* – metoda transformacji logarytmicznej, *bNK* – metoda najmniejszych kwadratów, *bP1* – metoda przybliżona I. Do najmniejszych wartości błędu prognozy *ex post* prowadzi MNK, natomiast największym błędem obarczone są wyniki metody transformacji logarytmicznej. Zbliżone wartości błędu wykazują prognozy uzyskane metodą najmniejszych kwadratów (*bNK*) oraz metodę przybliżoną (*bP1*).

W celu oceny przydatności metod przybliżonych, wykonano symulacje dla addytywnego modelu składnika losowego – parametr $B = 1,5$. Najmniejszym błędem prognozy *ex post* wyróżnia się metoda najmniejszych kwadratów, przy czym błąd prognozy rośnie liniowo w funkcji poziomu składnika losowego σv i dla $\sigma v = 0,1$ osiąga wartość 6,21%. Stosunek wartości błędów *ex post* poszczególnych metod przybliżonych do wartości błędu *ex post* MNK wynosi: 1,051 dla metody I, 1,012 dla metody II, 1,017 dla metody III.



Rysunek 1. Wartości błędów względnego *ex post* (w %) dla addytywnego modelu składnika losowego w funkcji poziomu składnika losowego σ_i ; parametr $B = 0,5$, okres prognozy $T = 8$.
Linia przerywaną bL_i oznaczono wyniki metody transformacji logarytmicznej, linia ciągła bNK_i odpowiada metodzie MNK, linia kropkowana $bP1_i$ odpowiada metodzie przybliżonej I.

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 2. Wartości błędów względnego *ex post* (w %) dla addytywnego modelu składnika losowego w funkcji poziomu składnika losowego σ_i – parametr $B = 1,5$. Wyniki odnoszą się do metody transformacji logarytmicznej.

Źródło: opracowanie własne.

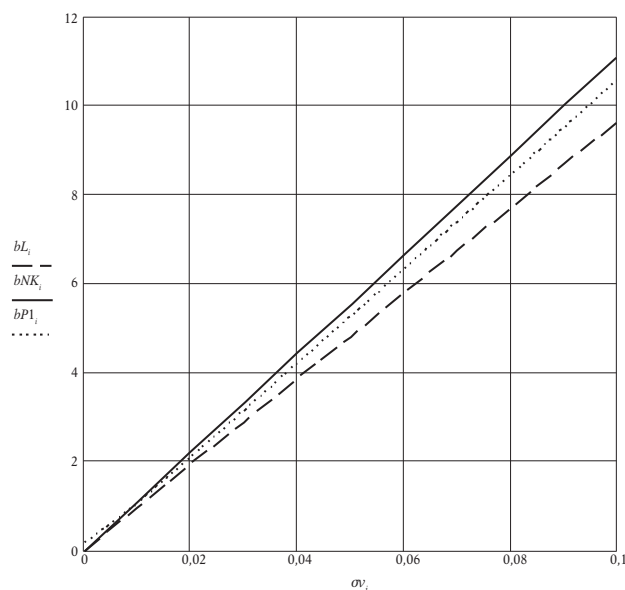
Na rysunku 2 przedstawiono wartości błędu względnego *ex post* bL_i odnoszące się do metody transformacji logarytmicznej, uzyskane dla addytywnego modelu składnika losowego – parametr $B = 1,5$. Z rysunku wynika odcinkami liniowa zależność wartości błędów od względnego poziomu składnika losowego σ_v , przy czym, powyżej wartości $\sigma_v = 0,04$ następuje gwałtowny wzrost współczynnika kierunkowego prostej $bL(\sigma_v)$. Podczas gdy dla $\sigma_v = 0,04$ błąd wynosi $bL = 10,6\%$, to dla $\sigma_v = 0,1$ osiąga wartość $bL = 177\%$. Przyczyny należy upatrywać w wysokim poziomie składnika losowego, który zgodnie ze wzorem (20), dla $\sigma_v = 0,1$ i $\bar{y} = 175,49$ wynosi $\sigma_a = 17,55$. Wykonując logarytmowanie wzoru (1) popełnia się błąd szczególnie duży dla małych wartości t , gdy wartości składnika losowego są porównywalne z wartością funkcji potęgowej.

Wykonując eksperyment numeryczny dla multiplikatywnego modelu składnika losowego z wartością parametru $B = 0,5$ stwierdzono, że najmniejszy błąd *ex post* zapewnia metoda transformacji logarytmicznej, który dla $\sigma_v = 0,1$ osiąga wartość 11,23%. Dla pozostałych metod uzyskano: $\frac{bNK}{bL} = 1,020$, $\frac{bP1}{bL} = 1,035$, $\frac{bP2}{bL} = 1,106$, $\frac{bP3}{bL} = 1,019$.

Na uwagę zasługują zbliżone wartości błędów bL , bNK i $bP3$.

Symulacje komputerowe wykonane dla multiplikatywnego modelu składnika losowego z wartością parametru $B = 1,5$ wykazały, że spośród metod przybliżonych, najmniejszy błąd *ex post* zapewnia metoda przybliżona I, który dla $\sigma_v = 0,1$ przyjmuje wartość 10,61%.

Dla pozostałych metod uzyskano: $\frac{bNK}{bP1} = 1,048$, $\frac{bP2}{bP1} = 1,058$, $\frac{bP3}{bP1} = 1,027$.



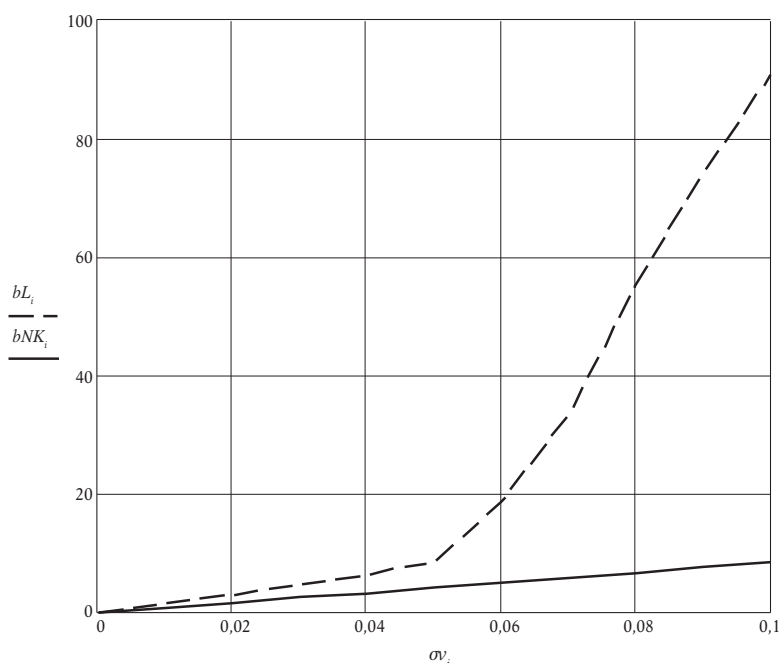
Rysunek 3. Wartości błędu względnego *ex post* (w %) dla multiplikatywnego modelu składnika losowego w funkcji poziomu składnika losowego σ_v – parametr $B = 1,5$. Linia przerywaną bL_i oznaczono wyniki metody transformacji logarytmicznej. Linia ciągła odpowiada MNK (bNK_i). Błąd metody przybliżonej I ($bP1_i$) zaznaczono linią kropkowaną.

Na rysunku 3 porównano wartości błędu *ex post* uzyskane dla multiplikatywnego modelu składnika losowego (wartość parametru $B = 1,5$) następujących metod: bL – metoda transformacji logarytmicznej, bNK – metoda najmniejszych kwadratów, $bP1$ – metoda przybliżona I. Do najmniejszych wartości błędu prognozy *ex post* prowadzi metoda transformacji logarytmicznej. Metoda przybliżona I charakteryzuje się mniejszym błędem niż MNK.

Eksperyment numeryczny wykonany dla mieszanego modelu składnika losowego (wzór (3)) z wartością parametru $B = 0,5$ wykazał, że najmniejszy błąd *ex post* zapewnia MNK, który dla $\sigma_v = 0,1$ przyjmuje wartość 8,51%. Dla pozostałych metod uzyskano: $\frac{bP1}{bNK} = 1,018$, $\frac{bP2}{bNK} = 1,097$, $\frac{bP3}{bNK} = 1,009$, $\frac{bL}{bNK} = 1,011$.

Z powyższych danych wynika, że aż cztery metody prowadzą do zbliżonych wartości błędu względnego *ex post*: MNK, metoda transformacji logarytmicznej oraz metody przybliżone I i III.

Jako ostatni przebadano model mieszany z wartością parametru $B = 1,5$ stwierdzając, że najmniejszy błąd *ex post* zapewnia metoda przybliżona I, który dla $\sigma_v = 0,1$ osiąga wartość 8,15%. Dla pozostałych metod uzyskano: $\frac{bNK}{bP1} = 1,021$, $\frac{bP2}{bP1} = 1,026$, $\frac{bP3}{bP1} = 1,007$.



Rysunek 4. Wartości błędów względnego *ex post* (w %) dla modelu mieszanego (wzór (3)) w funkcji poziomu składnika losowego σ_v – parametr $B = 1,5$. Linią przerywaną bL_i oznaczono wyniki metody transformacji logarytmicznej. Linią ciągłą odpowiada MNK (bNK_i).

Na rysunku 4 porównano wartości błędu *ex post* uzyskane dla modelu mieszanego (wartość parametru $B = 1,5$) w wyniku zastosowania metody transformacji logarytmicznej (bL) oraz MNK (bNK). Z rysunku wynika odcinkowo liniowa zależność wartości błędów od względnego poziomu składnika losowego σ_v , przy czym, powyżej wartości $\sigma_v = 0,05$ następuje gwałtowny wzrost współczynnika kierunkowego prostej $bL(\sigma_v)$. Podczas gdy, dla $\sigma_v = 0,05$ błąd wynosi $bL = 8,59\%$, to dla $\sigma_v = 0,1$ osiąga wartość $bL = 90,90\%$. Występuje tu, nieco załagodzona, sytuacja zaprezentowana na rysunku 2, odnoszącym się do addytywnego modelu składnika losowego – wartości błędu bL na rysunku 4 stanowią (w przybliżeniu) 50% wartości błędu bL przedstawionego na rysunku 2. Przyczyną tego jest jednakowy udział składnika addytywnego i składnika multiplikatywnego w modelu mieszanym (wzór (3)).

Podsumowując wyniki symulacji komputerowych pod kątem przydatności poszczególnych metod przybliżonych należy stwierdzić, że dla sześciu rozpatrzonych przypadków, metoda przybliżona I prowadzi do najmniejszego błędu prognozy *ex post* dla trzech wariantów: model addytywny ($B = 0,5$), model multiplikatywny ($B = 1,5$), model mieszany ($B = 1,5$). Metoda przybliżona III okazała się najlepsza dla dwóch przypadków: model multiplikatywny ($B = 0,5$) oraz model mieszany ($B = 0,5$). Metoda przybliżona II zapewniała najmniejszy błąd *ex post* dla modelu addytywnego z parametrem $B = 1,5$. Mając na uwadze, że w tym ostatnim przypadku metoda III minimalnie ustępuje metodzie II można zalecić stosowanie metod przybliżonych I i III. Metody przybliżone I i III zapewniają mniejszy błąd prognozy niż MNK dla modelu mieszanego i multiplikatywnego z parametrem $B = 1,5$. Metoda transformacji logarytmicznej prowadzi do najmniejszego błędu, spośród rozpatrywanych metod, dla multiplikatywnego modelu składnika losowego. W przypadku modelu addytywnego i mieszanego metoda transformacji logarytmicznej może być stosowana dla małych wartości parametru B ($B < 0,8$). Ograniczenie wartości $B < 0,8$ wynika stąd, że dla addytywnego modelu składnika losowego ($\sigma_v = 0,1$) wykonano symulacje komputerowe dla zmieniających się wartości parametru $B = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$, uzyskując wartości błędu $bL = 9,57; 9,69; 10,07; 10,85; 12,29; 15,68\%$. Oznacza to, że dla $B > 0,8$ następuje gwałtowny wzrost błędu. Ostatnia uwaga odnosi się do modelu rozpatrzonego w pracy ($A = 20$, $n = 7$, $T = 8$, $\sigma_v = 0,1$). W celu jej uogólnienia należałoby rozpatrzeć modele z inną wartością obserwacji n oraz okresu prognozy T – w wyniku normalizacji poziomu składnika losowego (wzór (20) parametr A nie ma wpływu na wartość względnego błędu *ex post*).

4. BŁĄD EX ANTE PROGNOZY UZYSKANEJ MNK DLA TRENDU POTĘGOWEGO

Stosując metodę transformacji logarytmicznej, w pierwszej kolejności oblicza się odchylenie standardowe reszt S' modelu zlinearyzowanego yL_t :

$$S' = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (L_t - yL_t)^2}{n - 2}} \quad (21)$$

gdzie: $yL_t = \ln AL + BL \cdot t'$
 L_t, AL, BL, t' określa wzór (5).

a następnie wyznacza się błąd prognozy *ex ante* [5, 7]:

$$DAL_T = S' \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(T' - \bar{t}')^2}{\sum_{t=1}^n (t' - \bar{t}')^2}} \cdot YP_T \quad (22)$$

gdzie: $T' = \ln(T)$; S' określa wzór (21); YP_T – wzór(16); \bar{t}' – wzór (5).

Natomiast autor nie spotkał w literaturze wzoru określającego błąd prognozy *ex ante* dla oszacowania parametrów trendu potęgowego wyznaczonych MNK.

Punktem wyjścia wyprowadzenia tej zależności jest macierz informacji Fishera [1]:

$$I = \frac{1}{\hat{\sigma}a^2} \cdot \begin{bmatrix} \sum_t \left(\frac{\partial \hat{y}_t}{\partial \hat{A}} \right)^2 & \sum_t \frac{\partial \hat{y}_t}{\partial \hat{A}} \cdot \frac{\partial \hat{y}_t}{\partial \hat{B}} \\ \sum_t \frac{\partial \hat{y}_t}{\partial \hat{A}} \cdot \frac{\partial \hat{y}_t}{\partial \hat{A}} & \sum_t \left(\frac{\partial \hat{y}_t}{\partial \hat{B}} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

gdzie: \hat{y}_t określa wzór (7)

$\hat{\sigma}a^2$ – oszacowanie wariancji składnika losowego.

Z zależności (7) i (23) otrzymuje się:

$$I = \frac{1}{\hat{\sigma}a^2} \cdot \begin{bmatrix} f_1(\hat{B}) & \hat{A}f_2(\hat{B}) \\ \hat{A}f_2(\hat{B}) & \hat{A}^2f_3(\hat{B}) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\text{gdzie: } f_1(\hat{B}) = \sum_t t^{2 \cdot \hat{B}}; f_2(\hat{B}) = \sum_t \ln(t) \cdot t^{2 \cdot \hat{B}}; f_3(\hat{B}) = \sum_t \ln^2(t) \cdot t^{2 \cdot \hat{B}}. \quad (24a)$$

Następnie wyznacza się odwrotność macierzy informacji Fishera

$$I^{-1} = \frac{\hat{\sigma}a^2}{\det} \cdot \begin{bmatrix} \hat{A}^2 \cdot f_3(\hat{B}) & -\hat{A} \cdot f_2(\hat{B}) \\ -\hat{A} \cdot f_2(\hat{B}) & f_1(\hat{B}) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\text{gdzie: } \det = \hat{A}^2 [f_1(\hat{B})f_3(\hat{B}) - f_2(\hat{B})^2]$$

$f_1(\hat{B}), f_2(\hat{B}), f_3(\hat{B})$ opisuje wzór (24a).

Elementy macierzy I^{-1} leżące na głównej przekątnej określają, zgodnie z nierównością Rao-Cramera, dolną granicę wariancji estymatorów parametrów A i B [1]:

$$\text{Var}(\hat{A}) \geq V_A = \frac{\hat{\sigma}^2 f_3(\hat{B})}{f_1(\hat{B})f_3(\hat{B}) - f_2(\hat{B})^2} \quad (26)$$

$$\text{Var}(\hat{B}) \geq V_B = \frac{\hat{\sigma}^2 f_1(\hat{B})}{\hat{A}^2 (f_1(\hat{B})f_3(\hat{B}) - f_2(\hat{B})^2)}. \quad (27)$$

W dalszej części przyjmuje się uproszczenie polegające na założeniu, że wariancja oszacowań parametrów uzyskanych MNK przyjmuje dolną granicę Rao-Cramera, oznaczoną we wzorach (26) i (27) odpowiednio V_A i V_B .

Błąd prognozy D_T wyraża się wzorem:

$$D_T = \hat{y}_T - yd_T + \varepsilon a_T \quad (28)$$

gdzie: $\hat{y}_T = \hat{A}T^{\hat{B}}$; $yd_T = AT^B$.

Dokonując rozwinięcia funkcji \hat{y}_T w szereg Taylora dla funkcji dwóch zmiennych w otoczeniu punktu (A, B) i ograniczając się do wyrażen zawierających pierwsze pochodne, uzyskuje się:

$$\hat{y}_T = AT^B + (\hat{A} - A) \frac{\partial yd_T}{\partial A} + (\hat{B} - B) \frac{\partial yd_T}{\partial B}. \quad (29)$$

Ze wzorów (28) i (29), otrzymuje się:

$$D_T = (\hat{A} - A)T^B + (\hat{B} - B)A \cdot \ln(T) \cdot T^B + \varepsilon a_T. \quad (30)$$

Wariancja błędu prognozy $V(D_T)$, wynosi:

$$V(D_T) = T^{2B} [V_A + V_B (A \cdot \ln(T))^2 + 2 \text{cov}(\hat{A}, \hat{B}) A \ln(T)] + \hat{\sigma}^2 \quad (31)$$

gdzie: V_A i V_B określają wzory (26) i (27); $\text{cov}(\hat{A}, \hat{B})$ odpowiada elementom leżącym poza główną przekątną macierzy I^{-1} (wzór (25):

$$\text{cov}(\hat{A}, \hat{B}) = \frac{-\hat{\sigma}^2 f_2(\hat{B})}{\hat{A} (f_1(\hat{B})f_3(\hat{B}) - f_2(\hat{B})^2)}. \quad (32)$$

Ze wzorów (26), (27), (31), (32) oraz przyjętego uproszczenia $A = \hat{A}$ i $B = \hat{B}$, otrzymuje się:

$$V(D_T) = \hat{\sigma}^2 \left[1 + \frac{T^{2\hat{B}} \left[\sum_t \ln^2 \left(\frac{T}{t} \right) t^{2\hat{B}} \right]}{f_1(\hat{B})f_3(\hat{B}) - f_2(\hat{B})^2} \right]. \quad (33)$$

Uwzględniając, że błąd prognozy *ex ante* DA_T wyraża się zależnością:

$$DA_T = \sqrt{V(D_T)}, \quad (34)$$

uzyskuje się:

$$DA_T = S \sqrt{1 + \frac{T^{2\hat{B}} \sum_t \left(t^{\hat{B}} \ln\left(\frac{T}{t}\right)\right)^2}{\sum_t t^{2\hat{B}} \sum_t t^{2\hat{B}} \ln^2(t) - \left(\sum_t t^{2\hat{B}} \ln(t)\right)^2}} \quad (35)$$

gdzie: $t = 1, 2, \dots, n$;

$$\hat{\sigma}_a = S = \sqrt{\frac{\sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - 2}} \quad (35a)$$

y_t – obserwacje; \hat{y}_t określa wzór (7); T – okres prognozy.

Zgodnie z wcześniejszymi założeniami upraszczającymi, zależność (35) określa błąd prognozy *ex ante* dla addytywnego modelu składnika losowego (wzór (1)).

W celu zweryfikowania wzorów (22) i (35) określających błąd *ex ante*, wykonano symulacje komputerowe dla trzech modeli składnika losowego (wzory (1), (2), (3)). Dla kolejnych wartości względnego poziomu składnika losowego $\sigma_v = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.1$ wykonano $M = 5000$ powtórzeń z wykorzystaniem generatora liczb losowych. Wartości błędu *ex post* wyznaczano zgodnie z poniższym wzorem opisującym średni błąd kwadratowy prognozy:

$$DP_T = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (YP_{m,T} - YR_{m,T})^2}. \quad (36)$$

Następnie obliczano współczynnik W stanowiący stosunek błędu *ex ante* do błędu *ex post*:

$$W_T = \frac{DA_T}{DP_T}. \quad (37)$$

Współczynnik ten został oznaczony odpowiednio: WNK_T dla MNK; $WP1_T$, $WP2_T$, $WP3_T$ dla metod przybliżonych I, II, III; WL_T dla metody transformacji logarytmicznej. W przypadku współczynników WNK_T , $WP1_T$, $WP2_T$, $WP3_T$ błąd *ex ante* wyznaczano ze wzoru (35) a dla WL_T stosowano wzór (22). Zamieszczone w tabeli 1 wartości współczynników uzyskano w rezultacie uśrednienia wyników dla zmieniającego się poziomu składnika losowego σ_v .

Tabela 1

Stosunek wartości błędu *ex ante* do wartości błędu *ex post* (wzór (37))

Addytywny model składnika losowego (wzór (1))										
	W NK_T		W $P1_T$		W $P2_T$		W $P3_T$		W L_T	
	B = 0,5	B = 1,5	B = 0,5	B = 1,5	B = 0,5	B = 1,5	B = 0,5	B = 1,5	B = 0,5	B = 1,5
$T = 8$	1,023	1,034	1,020	1,011	1,015	1,025	1,016	1,025	1,368	---
$T = 9$	1,022	1,048	1,022	1,002	1,004	1,036	1,012	1,027	1,345	---
$T = 10$	0,995	1,038	0,981	0,970	0,961	1,019	0,969	1,008	1,283	---
Multiplikatywny model składnika losowego (wzór (2))										
$T = 8$	0,77	0,506	0,77	0,57	0,75	0,53	0,79	0,54	1,013	1,013
$T = 9$	0,75	0,517	0,76	0,56	0,73	0,52	0,77	0,54	1,000	1,000
$T = 10$	0,75	0,532	0,73	0,56	0,69	0,52	0,75	0,55	0,974	0,974
Model mieszany składnika losowego (wzór (3))										
$T = 8$	1,003	0,703	0,999	0,734	0,968	0,703	1,016	0,718	1,37	---
$T = 9$	0,939	0,690	0,940	0,72	0,902	0,688	0,951	0,704	1,27	---
$T = 10$	0,911	0,703	0,91	0,74	0,855	0,697	0,922	0,721	1,22	---

Źródło: opracowanie własne.

Analizując wyniki zawarte w tabeli 1 stwierdza się następujące fakty.

W przypadku addytywnego modelu składnika losowego wartości współczynnika $W $NK_T$$ należą do przedziału $\langle 0,995, 1,048 \rangle$; współczynniki $W $P1_T$$, $W $P2_T$$, $W $P3_T$$ zawierają się w przedziałach $\langle 0,97, 1,022 \rangle$, $\langle 0,961, 1,036 \rangle$, $\langle 0,969, 1,027 \rangle$. Dla okresu prognozy $T = 10$ wartości współczynników są mniejsze od 1, co oznacza, że błąd prognozy *ex ante* jest mniejszy od rzeczywistego błędu prognozy wyznaczonego na drodze symulacji komputerowych. Należy stwierdzić stosunkowo dużą dokładność oszacowania błędu *ex ante* (wzór (35)) – wartości współczynników różnią się od liczby 1 o mniej niż 5%. Metoda transformacji logarytmicznej, dla parametru $B = 0,5$, prowadzi do wartości z przedziału $\langle 1,283, 1,368 \rangle$, co oznacza zawyżone wartości błędu prognozy *ex ante*. W tabeli nie zamieszczono wartości współczynnika $W $L_T$$ (dla wartości parametru $B = 1,5$), ponieważ wykazywał zbyt duże wahania (należy do przedziału $\langle 0,23, 1,54 \rangle$), aby można było uśrednić jego wartości.

W przypadku multiplikatywnego modelu składnika losowego, zbyt małe wartości $W $NK_T$$ i $W $P_T$$ oznaczają nieprzydatność wzoru (35). Metoda transformacji logarytmicznej prowadzi do wartości $W $L_T$$ z przedziału $\langle 0,974, 1,013 \rangle$, co oznacza dużą dokładność wzoru (22) – zaniżone wartości błędu prognozy *ex ante* występują tylko dla okresu prognozy $T = 10$.

Dla modelu mieszanego z parametrem $B = 1,5$ zrezygnowano z zamieszczenia współczynnika $W $L_T$$, który należał do przedziału $\langle 0,26, 1,53 \rangle$. Wartości współczynników

dla MNK i metod przybliżonych wskazują na możliwość stosowania wzoru (35) dla parametru $B = 0,5$. Natomiast, dla $B = 1,5$ wzór (35) nie powinien być stosowany. Odnosnie metody transformacji logarytmicznej można zauważyć, że wzór (22) jest nieprzydatny dla modelu mieszanego.

4. ZAKOŃCZENIE

W pracy rozpatrzono wybrane aspekty związane ze stosowaniem trendu potęgowego w procesie prognostycznym.

Symulacje komputerowe opisane w p. 3 wykazały dużą wrażliwość metody transformacji logarytmicznej na założony model składnika losowego. Metoda ta sprawdza się, jak powszechnie wiadomo, dla modelu multiplikatywnego a także dla modelu mieszanego i modelu addytywnego składnika losowego przy małych wartościach parametru B ($B < 0,8$). Natomiast metody tej nie powinno się stosować dla modeli I i III, gdy estymowany parametr B przyjmuje duże wartości ($B > 0,8$). Tym samym potwierdziły się zastrzeżenia dotyczące ograniczenia transformacji logarytmicznej wyrażane w pracach [3] i [4].

W odróżnieniu od pracy [3], gdzie proponuje się wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel do rozwiązania układu równań (6), w pracy zaproponowano metody przybliżone, które prowadzą do wyników zbliżonych, jakie uzyskuje się MNK. Metody te można uporządkować w następującej kolejności: metoda przybliżona I (wzory (12), (15)), metoda przybliżona III (wzory (14), (15)) oraz metoda przybliżona II (wzory (13), (15)).

W przypadku metody I wzór (12) można zapisać w postaci dogodniejszej do obliczeń:

$$\hat{B}_1 = \frac{y_n + y_{n-1} - y_1 - y_2}{2 \sum_{t=2}^{n-1} \frac{y_t}{t}}. \quad (38)$$

Stosując metody przybliżone, jak również MNK, można wyznaczyć błąd *ex ante* na podstawie wzoru (35). Przyjmując jako kryterium najmniejszą wartość błędu *ex ante* zaleca się wykonanie obliczeń trzema metodami przybliżonymi, a wartość prognozy wyznacza się tą metodą, która spełnia to kryterium.

Uniwersytet Szczeciński

LITERATURA

- [1] Chow G.C., [1995], *Ekonometria*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [2] Dahlquist G., Bjorck A., [1983], *Metody numeryczne*, PWN, Warszawa.
- [3] Jurkiewicz T., Plenikowska-Ślusarz T., [2001], *Algorytmy optymalizacyjne w estymacji nieliniowych funkcji regresji*, „Wiadomości Statystyczne” z. 10, s. 10-15.
- [4] Kmenta J., [1990], *Elements of Econometrics* (second edition), Macmillan Publishing Co.

- [5] *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania*, [2001], pod redakcją Cieślak M. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [6] Purczyński J., [2008], *Wybrane aspekty prognozowania z wykorzystaniem trendu wykładniczego*, „Przegląd Statystyczny” z. 1, s. 27-44.
- [7] Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S., [2004], *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania*, PWN, Warszawa.

Praca wpłynęła do redakcji w lutym 2009 r.?

METODY PROGNOZOWANIA Z WYKORZYSTANIEM TRENDU POTĘGOWEGO

Streszczenie

W pracy rozpatrzono wybrane aspekty związane ze stosowaniem trendu potęgowego w procesie prognostycznym. Zaproponowano przybliżone metody estymacji parametrów trendu (wzory (12)-(15)), które prowadzą do zbliżonych wyników, jakie daje metoda najmniejszych kwadratów (MNK). Wyprowadzono wzór (35) określający błąd *ex ante* prognozy wyznaczonej metodami przybliżonymi oraz MNK dla addytywnego modelu składnika losowego. Wykonano symulacje komputerowe uwzględniające trzy modele składnika losowego (addytywny, multiplikatywny, mieszany) mające na celu określenie zakresu przydatności metody transformacji logarytmicznej, MNK oraz metod przybliżonych.

Słowa kluczowe: prognozowanie, estymacja parametrów trendu potęgowego, błąd prognozy *ex ante*, symulacje komputerowe

METHODS OF FORECASTING WITH THE USE OF POWER TREND

Summary

In this paper selected aspects concerning the use of power trend in the forecasting process were considered. Approximate methods for estimating trend parameters (equations (12)-(15)) were proposed. The methods yielded results similar to results given by least squares method (LSM). Formula (35) determining *ex ante* error of the forecast determined by the approximate methods and LSM for random element additive model was defined. Computer simulations were done – including three models of random element (additive, multiplicative, mixed) – with the aim of determining the range of usefulness of logarithmic transformation method, LSM and the approximate methods.

Key words: forecasting, estimation of power trend parameters, forecast *ex ante* error, computer simulations