

BOGUSŁAW GUZIK

UWAGI NA TEMAT ZASTOSOWANIA METODY DEA DO USTALANIA ZDOLNOŚCI KREDYTOWEJ

1. WSTĘP

Artykuł nawiązuje do podejścia proponującego wykorzystanie metod *Data Envelopment Analysis* do ustalania zdolności kredytowej. Sprawie tej poświęcono wiele prac. Za autorów podejścia uchodzi m.in. Truott, Rai, Zhang [14]; Yeh [15]; Emel, Oral, Reisman, Yolalan [8]. W latach późniejszych pojawiły się ważne prace: Paradi, Asmild, Simak [13]; Chang, Chiang, Tang [7]; Min, Lee [12], a w literaturze krajowej: Gospodarowicz [10], Feruś [9]. Podejście DEA do analizy ryzyka kredytowego bardzo wyraźnie rozszerza krąg ekonomicznych zastosowań tej metody i czyni ją jeszcze bardziej atrakcyjną dla specjalistów. Wzbogaca również krąg metod *credit scoringu* o bardzo ciekawą, stosunkowo prostą i użyteczną technikę analityczną, co z kolei powinno być atrakcyjne dla ekonomistów.

Wydaje się jednak, że dotychczasowe „klasyczne” propozycje zastosowania DEA w ocenie ryzyka kredytowego mają pewne wady i dlatego należy wprowadzić do nich stosowne modyfikacje i uzupełnienia. Dyskusja „wad” klasycznego podejścia oraz propozycje jego uzupełnień są właśnie celem niniejszego artykułu.

2. KLASYCZNY SCHEMAT ZASTOSOWANIA DEA W *CREDIT SCORINGU*

Tradycyjne podejście DEA do analizy ryzyka kredytowego jasno i kompetentnie opisano w cytowanych pracach Min, Lee [12] oraz Emel, Oral, Reisman, Yolalan [8]. Na ich tle scharakteryzujemy omawianą problematykę. Etapy badania według [12], s. 1763-1764 są następujące:

1. Wybór zbioru obserwacji.
2. Identyfikacja wstępnych wskaźników finansowych.
3. Ustalenie końcowej listy wskaźników finansowych.
4. Kalkulacja wskaźnika zdolności kredytowej za pomocą DEA.
5. Konstrukcja funkcji dyskryminacyjnej. Walidacja za pomocą metod regresji, metod dyskryminacyjnych oraz testowanie aktualnych przypadków bankructwa.
6. Propozycja metody ratingu kredytowego wykorzystującej statystyczny rozkład wskaźnika zdolności kredytowej.

Cytowane uporządkowanie etapów badania i zamieszczone w artykule [12] oraz szerokie do nich komentarze są bardzo pomocne i wartościowe dla analityków bankowych. W niniejszym artykule odniesiemy się tylko do tych etapów, w których bezpośrednio wykorzystuje się metodę DEA lub jej wyniki.

3. KALKULACJA WSKAŹNIKÓW ZDOLNOŚCI KREDYTOWEJ ZA POMOCĄ DEA

3.1. UKIERUNKOWANY NA NAKŁADY STANDARDOWY MODEL CCR

W klasycznych propozycjach sugeruje się wykorzystanie modelu CCR¹. Z formalnego punktu widzenia model ten jest pewnym (stosunkowo prostym) zadaniem programowania liniowego. Istnieje kilka jego wersji: (a) standardowa lub kanoniczna; (b) ukierunkowana na rezultaty lub na nakłady; (c) pierwotna (mnożnikowa) lub dualna (obwiedniowa).

Dla wyjaśnienia dodajmy, że model jest *standardowy*, gdy wszystkie ograniczenia mają charakter nierówności słabych, a kanoniczna, gdy ograniczenia są równaniami (postać kanoniczna, to wersja z luzami, „slack’ami”). Model jest *ukierunkowany na nakłady*, gdy postuluje się minimalizację nakładów przy dolnych ograniczeniach na wielkość rezultatów, a *ukierunkowany na rezultaty*, gdy postuluje się maksymalizację rezultatów przy górnych ograniczeniach na wielkość nakładów. W klasycznej pracy Charnesa, Coopera, Rhodesa [5] *modelem pierwotnym* nazwano wersję, w której wyznacza się jednostkowe wyceny nakładów oraz rezultatów, tzw. mnożniki. Modelem dualnym natomiast nazwano wersję, w której wyznacza się tzw. wagi intensywności służące do określenia optymalnej technologii zbioru obiektów. Ustalenie, co jest wersją pierwotną a co dualną, jest jednak sprawą konwencji, gdyż z matematycznego punktu widzenia model dualny do modelu dualnego to model pierwotny. Dlatego też pojawiają się propozycje, by zamiast nazw model „pierwotny” czy „dualny” używać terminów model mnożnikowy (*multiplier model*) – wtedy, gdy wyznacza się wyceny jednostkowe, czyli mnożniki oraz model obwiedniowy (*envelopment model*) – wtedy, gdy wyznacza się wagi intensywności) por. np. [6]. Model mnożnikowy nazwać można modelem wycen jednostkowych, a obwiedniowy – modelem struktury technologii lub modelem wag intensywności.

Ukierunkowany na nakłady standardowy (obwiedniowy) model CCR ma postać:

Dane

– Lista obiektów, $j = 1, \dots, J$. W odniesieniu do problematyki badania zdolności kredytowej będzie to zbiór wniosków kredytowych, firm, projektów, wnioskodawców itp.

– Lista nakładów $n = 1, \dots, N$ oraz lista rezultatów $r = 1, \dots, R$. W problematyce *credit scoring* nakładami są te wielkości, które wnioskujący muszą ponieść, aby uzyskać rezultaty określające zdolność kredytową².

¹ Model CCR opracowany został przez Charnsa, Coopera, Rhodesa [5]

² Np. w [12], s. 1767 rozpatruje się trzy „nakłady” w sensie DEA: (1) wskaźnik wydatków finansowych do sprzedaży, (2) wskaźnik zobowiązań bieżących, (3) relacja pożyczek do aktywów ogółem oraz trzy rezultaty: (1) wskaźnik adekwatności kapitałowej, (2) wskaźnik płynności bieżącej, (3) wskaźnik zyskowności. Natomiast w [9], s. 53 rozpatruje się dwa nakłady: (1) wskaźnik rotacji aktywów w dniach, (2) wskaźnik ogólnego zadłużenia oraz cztery rezultaty: (1) stopa zysku netto, (2) ROA, (3) ROE, (4) wskaźnik płynności bieżącej.

- Wielkości rezultatów w poszczególnych obiektach, y_{rj} ($r = 1, \dots, R; j = 1, \dots, J$).
- Wielkości nakładów w poszczególnych obiektach, x_{nj} ($n = 1, \dots, N; j = 1, \dots, J$).

Wszystkie rezultaty są nieujemne, a nakłady są dodatnie.

Rezultaty mają charakter maksymant (stymulant): wyższa wartość rezultatu oznacza większą zdolność kredytową.

Nakłady to wielkości lub okoliczności, które są niezbędne dla uzyskania rezultatów. Wyższy poziom rezultatu wymaga – *ceteris paribus* – wyższego poziomu nakładu.

W celu wyznaczenia efektywności dla każdego obiektu konstruuje się jego dotyczące zadanie decyzyjne. Zadanie dla obiektu o -tego ma postać:

Zmienne decyzyjne

θ_o – mnożnik poziomu nakładów obiektu o -tego,

λ_{oj} – waga intensywności technologii obiektu j -ego ($j = 1, \dots, J$).

Waga intensywności λ_{oj} określa krotność technologii empirycznej obiektu j -ego występującą w technologii wspólnej zbioru wszystkich obiektów. W modelu CCR obiekt o -ty też może tworzyć technologię wspólną. Technologia wspólna zorientowana jest na uzyskanie rezultatu nie mniejszego od rezultatów obiektu o -tego przy nakładach nie większych od poczynionych przez ten obiekt. Nakład n -ty w technologii wspólnej wynosi:

$$\bar{x}_{no} = \sum_{j=1}^J \lambda_{oj} x_{nj} \quad (n = 1, \dots, N) \quad (1)$$

a rezultat r -ty:

$$\bar{y}_{ro} = \sum_{j=1}^J \lambda_{oj} y_{rj} \quad (r = 1, \dots, R) \quad (2)$$

Mnożnik θ_o określa krotność nakładów obiektu o -tego, jaką muszą zastosować wszystkie obiekty w swej technologii wspólnej, aby uzyskać rezultaty obiektu o -tego.

Funkcja celu

$$\min \theta_o \quad (3)$$

Warunki ograniczające i znakowe

$$\bar{y}_{ro} \geq y_{ro} \quad (r = 1, \dots, R), \quad (4)$$

$$\bar{x}_{no} \leq \theta_o x_{no} \quad (n = 1, \dots, N), \quad (5)$$

$$\theta_o, \lambda_{oj} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, J). \quad (6)$$

Niekiedy dodaje się warunek zmiennych korzyści skali, tzw. warunek BCC:

$$\sum_{j=1}^J \lambda_{oj} = 1 \quad (7)$$

wówczas mowa jest o zadaniu BCC³. Niekiedy wreszcie dodaje się też warunek:

$$\theta_o \leq 1. \quad (8)$$

który jednak w zadaniu CCR oraz BCC spełniony jest „automatycznie” i dlatego można go pominąć (w innych zadaniach może on być konieczny).

Wskaźnikiem efektywności obiektu o -tego jest uzyskany na podstawie modelu CCR *optymalny* mnożnik nakładów, $\tilde{\theta}_o$. Określa on, jaką przynajmniej krotność nakładów obiektu o -tego musiałyby wykorzystać wszystkie obiekty w swej optymalnej technologii wspólnej, aby otrzymać rezultaty nie gorsze od uzyskanych przez obiekt o -ty. Obiekt jest w pełni efektywny (w sensie Farrella), gdy $\tilde{\theta}_o = 1$, co pomijając rzadkie szczególne przypadki ma miejsce, gdy zorientowana na obiekcie o -ty optymalna technologia wspólna redukuje się do technologii empirycznej obiektu o -tego. Jeśli $0 < \tilde{\theta}_o < 1$, to obiekt o -ty jest nieefektywny, bowiem wspólna technologia⁴ dla uzyskania rezultatów obiektu o -tego potrzebuje mniej nakładów niż miało to miejsce w tym obiekcie.

W problematykę zdolności kredytowej „rezultatami” są zmienne charakteryzujące różne strony zdolności kredytowej, a „nakładami” – zmienne charakteryzujące wielkości niezbędne dla uzyskania zdolności kredytowej. W tym sensie analogia między badaniem zdolności kredytowej a badaniem efektywności na podstawie modelu DEA jest oczywista:

Wskaźnik efektywności $\tilde{\theta}_o$ można traktować jako syntetyczny wskaźnik zdolności kredytowej. Obiekt o wyższym poziomie wskaźnika efektywności to obiekt o wyższej zdolności kredytowej.

Przechodzimy do omówienia i analizy głównych wątpliwości dotyczących tradycyjnego nurtu zastosowań DEA do analizy zdolności kredytowej.

3.2. PROBLEM 1 – CZY POTRZEBNY JEST POSTULAT ZMIENNYCH KORZYŚCI SKALI?

Pierwsza wątpliwość dotyczy warunku BCC. Wyraża on postulat, by technologia wspólna była liniową wypukłą kombinacją liniową technologii empirycznych, czyli ich średnią ważoną. Wagami są współczynniki λ_{oj} ($j = 1, \dots, J$).

Z matematycznego i ekonomicznego punktu widzenia jest to bardzo wygodne założenie, gdyż pozwala dowieść wielu ciekawych własności ekonomicznych i matematycznych modelu DEA. Z praktycznego jednak punktu widzenia jest to założenie bardzo silne i słuszne jedynie w odniesieniu do obiektów o mniej więcej tej samej skali. Jeśli natomiast obiekty są różnej skali założenie (7) prowadzi do deformacji rozwiązania.

Dla przykładu weźmy pod uwagę warunek (4) dotyczący rezultatu numer r . Zapiszemy go w nieco innej formie:

$$\sum_{j=1}^J \lambda_{oj} y_{rj} \geq y_{ro} \quad (1 \leq r \leq R). \quad (4)'$$

³ W odniesieniu do analizy *credit scoring* warunek taki sugeruje się np. w pracach [14] s. 407 oraz [13] s. 155. Warunek BCC pochodzi od Bankera, Charnesa, Coopera [3]. Cały model (3)-(7), będący rozszerzeniem modelu CCR o warunek (7), nazywany jest modelem BCC.

⁴ Z uwagi na strukturę matematyczną zadania, nie ma w niej wtedy technologii obiektu o -tego.

Jeśli obiekt o -ty jest duży w tym sensie, że jego rezultat jest większy od rezultatu w każdym innym obiekcie, a więc jeśli $y_{ro} > y_{rj}$ ($j = 1, \dots, J; j \neq o$), to dla obiektu o -tego nie istnieją takie λ_{oj} ($j \neq o$), które jednocześnie: są nieujemne, sumują się do 1, spełniają warunek (4)'. Jeśli bowiem wszystkie $y_{rj} < y_{ro}$ ($j \neq o$), to średnia ważona takich wartości y_{rj} musi być mniejsza od y_{ro} .

Jedyną wchodzącą w grę wartością jest wówczas $\lambda_{o,o} = 1$, a to oznacza, że jedynym rozwiązaniem modelu BCC jest to, że obiekt o -ty jest w pełni efektywny⁵.

Podobnie jest, gdy obiekt o -ty jest mały w tym sensie, że jego n -ty nakład jest mniejszy od tego nakładu w każdym innym obiekcie, a więc gdy $x_{no} < x_{nj}$ ($j = 1, \dots, J; j \neq o$). Wówczas nie istnieją takie λ_{oj} ($j \neq o$) nieujemne i sumujące się do 1, aby możliwe było spełnienie warunku:

$$\sum_{j \neq o} \lambda_{oj} x_{nj} \leq \theta_o x_{no} \quad (1 \leq j \leq N). \quad (5)'$$

gdy $\theta_o \leq 1$. Jedynym rozwiązaniem jest $\lambda_{o,o} = 1$, co oznacza, że efektywność $\theta_o = 1$.

Generalny wniosek jest następujący:

Wprowadzenie bardzo często rekomendowanego warunku BCC może doprowadzić do sytuacji, że wiele obiektów będzie w pełni efektywnych, co w odniesieniu do problematyki *credit scoring* oznaczałoby, że wiele obiektów jest „zdrowych” ekonomicznie i ma najwyższą zdolność kredytową. Niestety, ów wysoki wskaźnik efektywności (czyli „zdolności kredytowej”) często będzie jednak wynikał tylko z formalnych konsekwencji dostosowania się zadania do postulatu BCC, a nie z rzeczywistych osiągnięć obiektu.

Propozycja rozwiązania problemu 1: należy zrezygnować z postulatu zmiennych korzyści skali

Warunek (7) można postawić tylko wtedy, gdy obiekty są mniej więcej tej samej skali i gdy rzeczywiście jesteśmy pewni, że mają miejsce tzw. zmienne korzyści skali.

3.3. PROBLEM 2 – REDUNDANCJA LICZBY OBIEKTÓW NAJLEPSZYCH, JAK PRZED NIĄ SIĘ UCHRONIĆ?

W modelu CCR oraz w wielu innych modelach DEA, w których w technologii wspólnej zbioru obiektów może uczestniczyć technologia empiryczna badanego obiektu dzieje się tak, że liczba obiektów o największej efektywności (równej 1) może być bardzo duża – niekiedy połowa a nawet więcej. Dochodzi więc do swego rodzaju redundancji (nadmiarowości) obiektów najlepszych. Trudno bowiem przyjąć, że połowa czy więcej obiektów, to obiekty, co do których nie można mieć żadnych zastrzeżeń i które są wzorcowe. Dodatkowo dochodzi jeszcze kłopot interpretacyjny, gdyż w sytuacji, gdy wiele obiektów ma wskaźnik efektywności równy 1, nie można utworzyć pełnego

⁵ Dodajmy, że z tego właśnie powodu efektywność obiektu w sensie BCC jest nie mniejsza od efektywności w sensie CCR, a liczba obiektów w pełni efektywnych w modelu BCC jest nie mniejsza od występującej w modelu CCR.

rankingu obiektów. Obiekty z efektywnością 1 muszą być plasowane na tym samym, pierwszym, miejscu.

Propozycja rozwiązania problemu 2: dla uzyskania pełnego rankingu wniosków należy zastosować model SE-CCR

Model nadefektywności (*super-efficiency*) CCR, kodowany dalej jako SE-CCR⁶, jest bardzo prostą modyfikacją modelu CCR polegającą na wykluczeniu obiektu o -tego ze zbioru obiektów tworzących technologię wspólną zorientowaną na obiekt o -ty. Formalnie można go zapisać następująco:

Dane – jak w CCR

Zmienne decyzyjne

ρ_o – mnożnik poziomu nakładów obiektu o -tego,

λ_{oj} ($j = 1, \dots, J$ oprócz $j = o$) – wagi intensywności.

Funkcja celu

$$\min \rho_o \quad (9)$$

Warunki ograniczające i znakowe

$$\sum_{j \neq o} \lambda_{oj} y_{rj} \geq y_{ro} \quad (r = 1, \dots, R), \quad (10)$$

$$\sum_{j \neq o} \lambda_{oj} x_{nj} \leq \rho_o x_{no} \quad (n = 1, \dots, N), \quad (11)$$

$$\rho_o, \lambda_{oj} \geq 0 \quad (j \neq o). \quad (12)$$

Uzyskany na podstawie modelu SE-CCR optymalny mnożnik nakładów $\tilde{\rho}_o$ jest *wskaźnikiem rankingowym* obiektu o -tego. Określa on, jaką przynajmniej krotność nakładów obiektu o -tego musiałyby wykorzystać pozostałe obiekty w swej optymalnej technologii wspólnej, aby otrzymać rezultaty nie gorsze od uzyskanych przez obiekt o -ty.

Obiekt jest w pełni efektywny w sensie Farrela (czyli w sensie CCR), gdy $\tilde{\rho}_o \geq 1$, a więc gdy inni – nawet w swej optymalnej technologii wspólnej – dla uzyskania rezultatów otrzymanych przez obiekt o -ty, muszą poczynić nakłady nie mniejsze od poniesionych przez obiekt o -ty. W przypadku $\tilde{\rho}_o < 1$ obiekt o -ty jest nieefektywny, bowiem inne obiekty dla uzyskania rezultatów obiektu o -tego potrzebują mniej nakładów niż ich obiekt ten zużył. Efektywność w sensie Farrela obiektu o -tego wynosi:

$$\tilde{\theta}_o = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \tilde{\rho}_o \geq 1 \\ \tilde{\rho}_o & \text{gdy } \tilde{\rho}_o < 1 \end{cases} \quad (13)$$

Korzystając ze wskaźników rankingowych można zaproponować nowy wskaźnik efektywności:

⁶ Model ten lub jego idee proponowano w pracach Banker i Gilford [4] oraz Andersen-Petersen [2].

$$\tilde{\pi}_o = \frac{\tilde{\rho}_o}{M} \quad (14)$$

gdzie:

$$M = \max\{\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_J\}.$$

Wskaźnik $\tilde{\pi}_o$ jest unormowany na przedziale $[0, 1]$. Obiekt jest tym bardziej efektywny, im $\tilde{\pi}_o$ jest większe. Efektywność w sensie tego miernika nazywać będziemy π -efektywnością, a efektywność w sensie modelu CCR – θ -efektywnością.

Przykład

W tabeli 1 podano informacje opisujące kształtowanie się sześciu nakładów: X_1, \dots, X_6 oraz trzech rezultatów: Y_1, Y_2, Y_3 w 19 obiektach. Przykład jest umowny⁷, gdyż niestety, we wszystkich znanych autorowi pracach dotyczących zastosowania metod DEA do analizy *credit scoring*, brak jest danych oryginalnych (lub ich fragmentów), pozwalających na sprawdzenie obliczeń oraz kontynuację badań.

Tabela 1

Informacje statystyczne

Nakład/ Rezultat	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}
X_1	31955	15647	9852	7287	3320	5591	7467	5089	5627	5387
X_2	2654	1498	1148	717	580	651	494	323	386	440
X_3	58938	31778	35594	12988	23044	10152	17607	14937	11550	9713
X_4	19836	18714	15935	19764	11077	13223	9245	3866	6879	3871
X_5	14917	4771	14260	5208	12620	10983	3597	5347	3492	2038
X_6	82900	51793	41438	38561	24669	18871	24169	16069	15550	14002
Y_1	13431	10513	8657	13517	2844	9364	3155	1123	2181	4145
Y_2	3785	2377	1955	936	724	1026	1034	651	780	459
Y_3	2254	2279	1358	824	855	1188	1331	603	572	228

Nakład/ Rezultat	O_{11}	O_{12}	O_{13}	O_{14}	O_{15}	O_{16}	O_{17}	O_{18}	O_{19}
X_1	2017	1339	1552	1715	982	1772	783	1164	856
X_2	102	60	80	117	56	87	93	67	68
X_3	6150	7038	2176	5794	643	1688	1654	1026	1029

⁷ Choć dane pochodzą z autentycznych projektów empirycznych.

cd. tabeli 1

Nakład/ Rezultat	O_{11}	O_{12}	O_{13}	O_{14}	O_{15}	O_{16}	O_{17}	O_{18}	O_{19}
X_4	1646	839	4636	1386	5336	254	528	285	132
X_5	3960	4859	6806	652	1383	1037	193	123	289
X_6	5899	4249	1173	6717	4800	1442	2211	1461	989
Y_1	2777	2059	1490	578	667	771	206	381	40
Y_2	314	208	105	167	137	230	72	110	132
Y_3	225	200	68	144	112	166	44	44	11

Źródło: dane umowne.

Wskaźniki θ -efektywności oraz wskaźniki rankingowe z modelu SE-CCR i wskaźniki π -efektywności podano w tabeli 2. Przedstawiono również ranking według wskaźnika θ oraz według wskaźnika rankingowego ρ (lub, co na to samo wychodzi, według wskaźnika π).

Tabela 2

Wskaźniki efektywności i ranking obiektów na podstawie modeli CCR oraz SE-CCR

Obiekt	θ -efektywność	Ranking według θ -efektywności	Wskaźnik rankingowy ρ	π -efektywność	Ranking według π -efektywności
O_1	0,886	17	0,886	0,283	17
O_2	1	1	1,426	0,457	12
O_3	1	1	1,139	0,365	15
O_4	1	1	1,944	0,622	5
O_5	1	1	1,212	0,388	13
O_6	1	1	1,651	0,528	7
O_7	1	1	1,976	0,632	4
O_8	1	1	1,188	0,380	14
O_9	1	1	1,038	0,332	16
O_{10}	1	1	1,430	0,458	11
O_{11}	1	1	1,502	0,481	10
O_{12}	1	1	1,566	0,501	9
O_{13}	1	1	2,376	0,760	2
O_{14}	0,740	18	0,740	0,237	18

cd. tabeli 2

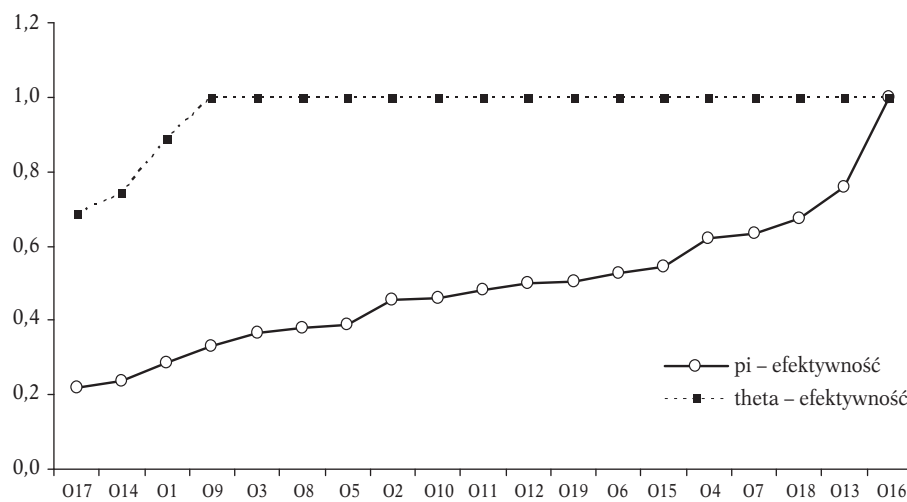
Obiekt	θ -efektywność	Ranking według θ -efektywności	Wskaźnik rankingowy ρ	π -efektywność	Ranking według π -efektywności
O_{15}	1	1	1,700	0,544	6
O_{16}	1	1	3,124	1	1
O_{17}	0,686	19	0,686	0,219	19
O_{18}	1	1	2,103	0,673	3
O_{19}	1	1	1,575	0,504	8

Źródło: obliczenia własne.

Tradycyjny model CCR sugeruje, że aż 16 na 19 obiektów jest efektywnych, co w odniesieniu do badania zdolności kredytowej oznaczałoby, że aż 16 na 19 wniosków odznacza się znakomitą zdolnością kredytową.

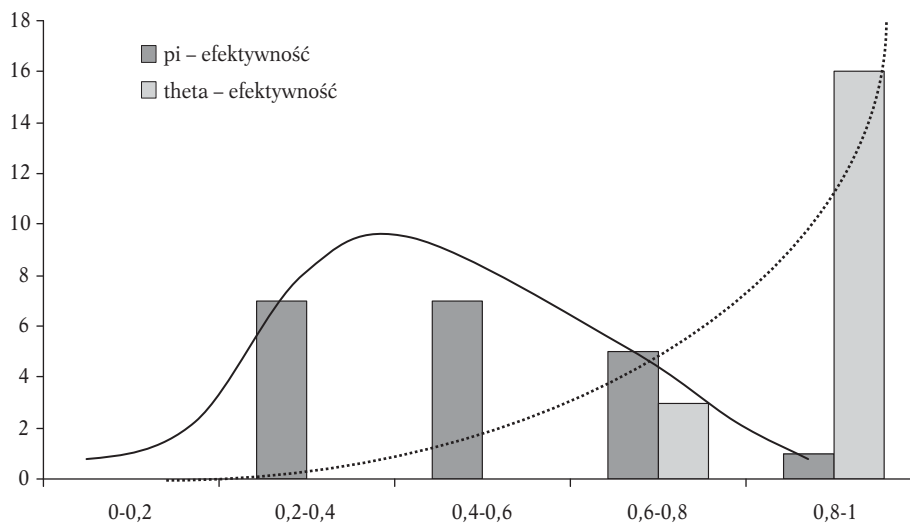
Inne wnioski wynikają natomiast z modelu SE-CCR. Według niego istnieje jeden, zdecydowanie najlepszy obiekt O_{16} . Efektywność kilku pozostałych (O_4 , O_6 , O_7 , O_{12} , O_{13} , O_{15} , O_{18} , O_{19}) plasuje się w granicach 50-80% efektywności obiektu najlepszego, a pozostałych wynosi mniej, nawet tylko 20% (np. O_{17}).

Na rys. 1 oraz 2 zilustrowano kształtowanie się obu rodzajów efektywności.



Rysunek 1. Efektywność obiektów

Źródło: opracowanie własne.



Wykres 2. Histogram efektywności

Źródło: opracowanie własne.

Z rys. 2 widać, że rozkład θ -efektywności może być skrajnie asymetryczny. Ponadto z definicji jest to zmienna dwustronnie ucięta, gdyż wskaźnik θ plasuje się w przedziale $(0, 1]$. Natomiast przebieg wskaźnika π -efektywności i związanego z nim wskaźnika rankingowego ρ , jest o wiele bardziej symetryczny. Ponadto wskaźnik rankingowy jest ucięty tylko prawostronnie w zerze, co znaczy, że po jego zlogarytmowaniu można otrzymać rozkład $\ln \rho$, być może, podobny do rozkładu normalnego.

3.4. PROBLEM 3 – CZY EFEKTYWNOŚĆ WZGLĘDNA DOBRZE CHARAKTERYZUJE ZDOLNOŚĆ KREDYTOWĄ?

Tradycyjne metody *Data Envelopment Analysis* pozwalają określić efektywność obiektu względem danego zbioru obiektów, czyli efektywność *względna*. Nie pozwalają natomiast określić efektywności „bezwzględnej”, czyli efektywności w zbiorze wszystkich możliwych obiektów. A ponieważ w danym zbiorze zawsze przynajmniej jeden obiekt ma efektywność względną równą 1, dlatego możliwe jest, że:

1. jeśli nawet wszystkie obiekty mają niskie wartości zmiennych charakteryzujących zdolność kredytową (czyli niskie rezultaty), to i tak niektóre z nich będą miały efektywność równą lub prawie równą 1⁸;

⁸ Np. wśród ocen: 2, 3(=), 3(-), 3 oceną najlepszą, w pełni efektywną, jest trzy.

2. jeśli natomiast we wszystkich obiektach poziom zmiennych charakteryzujących zdolność kredytową jest bardzo korzystny (rezultaty są bardzo wysokie), to i tak dla niektórych z tych obiektów wskaźniki efektywności będą małe⁹.

W pierwszym wypadku, zgodnie z ogólną ideą ustalania efektywności za pomocą metod DEA należałoby uznać, że wiele obiektów odznacza się wysoką zdolnością kredytową, wbrew oczywistym faktom wynikającym z małej wartości zmiennych charakteryzujących zdolność kredytową. W drugim wypadku natomiast, wbrew oczywistym faktom oznaczającym wysoką zdolność kredytową, bo zmienne ją charakteryzujące osiągają bardzo korzystne wartości, trzeba by było przyjąć, że niektóre obiekty mają bardzo niezadowolającą zdolność kredytową.

Przykład

Można sprawdzić, że w trzech następujących sytuacjach:

sytuacja 1: nakłady są takie jak w tabeli 1 oraz rezultaty, takie jak w tabeli 1,

sytuacja 2: nakłady są takie jak w tabeli 1, ale rezultaty są 100 razy *mniejsze*,

sytuacja 3: nakłady są takie jak w tabeli 1, ale rezultaty są 100 razy *większe*,

wskaźniki efektywności będą takie same, mimo radykalnych zmian rezultatów przy tym samym poziomie nakładów¹⁰!

Oczywiście, analogiczna własność zachodzi też dla warunków dotyczących nakładów.

Pokazane przed chwilą, bardzo niedogodne, własności metody DEA można usunąć przez wprowadzenie do zadania DEA pewnego wirtualnego obiektu wzorcowego lub nawet kilku wirtualnych obiektów wzorcowych. Wtedy, oczywiście, efektywność nadal będzie względna, ale podstawą porównań będzie nie jakiś dowolny, wybrany przez procedurę, obiekt empiryczny, lecz z góry określony wirtualny wzorzec lub wzorce. Jeśli wzorzec jest „doskonały”, to relatywna efektywność względem niego będzie zbliżona do efektywności „bezwzględnej”.

Propozycja rozwiązania problemu 3: *dla wyeliminowania redundancji obiektów efektywnych należy wprowadzić „wirtualny” lub rzeczywisty obiekt wzorcowy i zastosować model DEA z dozwolonymi wzorcami.*

Konstrukcja wzorca

Jak obiekt wzorcowy skonstruować, jest sprawą pomysłowości badacza. Może to być jakiś, istniejący gdzie indziej, obiekt empiryczny o znacznie lepszych własnościach od obiektów przez nas badanych, np. znakomita firma uzyskująca najwyższe ratingi; mogą to być obiekty uznawane za najlepsze przez ekspertów. Można też próbować samodzielnie „statystycznie” skonstruować obiekt wzorcowy. Poniżej omawiamy trzy takie propozycje.

⁹ Np. wśród ocen 5, 6 najgorszą oceną jest 5.

¹⁰ Matematyczny dowód tej własności (ma ona zresztą miejsce dla wielu modeli DEA) jest bardzo prosty: Warunek dla rezultatów nie ulega zmianie, jeśli je wszystkie pomnożymy przez pewną dodatnią stałą a . Nierówność $\sum_j \lambda_{oj} y_{rj} \geq y_{ro}$ jest bowiem identyczny z nierównością $\sum_j \lambda_{oj} (ay_{rj}) \geq ay_{ro}$. Co więcej, będzie tak, gdy poszczególne rezultaty pomnożymy przez różne dodatnie stałe a_r ($r = 1, \dots, R$).

Propozycja 1: Wzorzec ekstremalny.

Za wielkość r -tego rezultatu w wirtualnym obiekcie wzorcowym przyjmujemy maksymalną zarejestrowaną wielkość rezultatu empirycznego, a za wielkość n -tego nakładu – minimalną zarejestrowaną wielkość nakładu empirycznego:

$$\begin{aligned} y_{rw} &= \max(y_{r1}, \dots, y_{rJ}), r = 1, \dots, R, \\ x_{nw} &= \min(x_{n1}, \dots, x_{nJ}), n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (15)$$

Indeks w oznacza „wzorcowy”.

Propozycja 2. Wzorzec przeciętny.

Wzorzec ekstremalny na ogół jest sztuczny i praktycznie nieosiągalny, co w dużym stopniu może wynikać np. z różnej wielkości obiektów. Wiadomo, że duże rezultaty wystąpią raczej w dużych niż małych obiektach, a małe nakłady – w obiektach raczej małych niż dużych. Wzorzec (15) łączy więc dwie przeciwne strony: pod względem rezultatów odwołuje się do obiektów dużych, a pod względem rezultatów – do obiektów małych. Dlatego można sugerować, aby wzorzec wirtualny był podobny do obiektu „przeciętnego”, np. żeby był określony na poziomie mediany czy średniej poszczególnych nakładów oraz rezultatów. W wypadku wzorca medianowego:

$$\begin{aligned} y_{rw} &= \text{mediana}(y_{r1}, \dots, y_{rJ}), r = 1, \dots, R, \\ x_{nw} &= \text{mediana}(x_{n1}, \dots, x_{nJ}), n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (16)$$

Propozycja 3. Wzorzec kwartyłowy. Wzorzec ekstremalny jest dość sztuczny, zaś wzorzec przeciętny może uplasować się w otoczeniu autentycznych obiektów. Pośrednim wyjściem jest przyjęcie wzorca kwartyłowego:

$$\begin{aligned} y_{rw} &= \text{kwartył 3.rzędu w szeregu}(y_{r1}, \dots, y_{rJ}), r = 1, \dots, R, \\ x_{nw} &= \text{kwartył 1.rzędu w szeregu}(x_{n1}, \dots, x_{nJ}), n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (17)$$

W tabeli 3 podano omawiane trzy wzorce statystyczne dotyczące danych z tabeli 1.

Tabela 3

Wzorce statystyczne

Nakład/Rezultat	Wzorzec ekstremalny	Wzorzec medianowy	Wzorzec kwartyłowy
X_1	783	3320	1446
X_2	56	323	83
X_3	643	9713	1932
X_4	132	4636	1113
X_5	123	3960	1210
X_6	989	14002	3230

cd. tabeli 3

Nakład/Rezultat	Wzorzec ekstremalny	Wzorzec medianowy	Wzorzec kwartyłowy
Y_1	13517	2181	6401
Y_2	3785	459	981
Y_3	2279	228	1022

Źródło: obliczenia własne.

Wersje modelu DEA

Generalnie możliwe są dwie wersje modeli DEA z góry ustalonymi wzorcami.

1. DEA rozszerzona o wzorce

Procedura jest prostym uogólnieniem tradycyjnej DEA: zbiór obiektów rozszerzany jest o obiekty wzorcowe, a obliczenia przeprowadza się tak, jak w tradycyjnej DEA, dopuszczając, że do rozwiązania może wejść każdy obiekt empiryczny oraz każdy obiekt wzorcowy.

Ta wersja badania może być przydatna dla sprawdzenia, czy obiekt słusznie został uznany za wzorzec. Jest oczywiste, że obiekt może być uznany za wzorzec, gdy jego efektywność na tle obiektów empirycznych jest nie mniejsza od pewnej dość dużej liczby większej od 1 (np. jego nadefektywność jest większa od 2).

2. DEA z dozwolonymi wzorcami

Obliczenia prowadzone są przy założeniu, że do rozwiązania mogą wejść tylko ustalone wcześniej obiekty wzorcowe. Mianowicie konstruuje się zadanie DEA z obiektami empirycznymi oraz obiektami wzorcowymi, z tym że dodatkowo postuluje się, by w modelu dla obiektu o -tego zerowe były wagi intensywności λ_{oj} dla obiektów niewzorcowych, $1 \leq j \leq J$.

Tę właśnie wersję modelu DEA proponujemy do ustalania zdolności kredytowej – zob. część 5 artykułu. Tam też znajduje się opis modelu oraz przykład. Na razie nie czynimy tego, gdyż nie chcemy przerywać dyskusji tradycyjnego podejścia DEA do mierzenia zdolności kredytowej.

Przykład

Korzystając z pierwszej wersji modelu SE-CCR *rozszerzonego o wzorce* sprawdzimy, czy podane w tabeli 3 wzorce: ekstremalny, medianowy oraz kwartyłowy mogą być traktowane jako wzorcowe. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 4.

Tabela 4

Wskaźniki efektywności i ranking obiektów

Obiekt	Wskaźniki rankingowe przy wzorcu:			
	ekstremalnym	medianowym	kwartylowym	bez wzorca (klasyczny)
O1	0,028	0,886	0,377	0,886
O2	0,050	1,426	0,607	1,426
O3	0,051	1,139	0,292	1,139
O4	0,107	1,944	0,496	1,944
O5	0,089	1,212	0,365	1,212
O6	0,097	1,651	0,378	1,651
O7	2,007	2,042	0,832	1,976
O8	1,012	1,188	0,660	1,188
O9	0,553	1,015	0,990	1,038
O10	1,512	1,512	0,623	1,430
O11	1,448	1,462	0,958	1,502
O12	2,972	2,972	1,301	1,566
O13	0,093	2,376	0,641	2,376
O14	0,030	0,740	0,311	0,740
O15	0,049	1,700	0,418	1,700
O16	0,050	3,124	0,989	3,124
O17	0,019	0,686	0,443	0,686
O18	0,029	2,103	1,103	2,103
O19	0,035	1,575	1,125	1,575
Efektywność wzorca	77,103	0,782	6,262	–

Źródło: obliczenia własne.

Wyniki sugerują, że wzorzec medianowy nie powinien być rozpatrywany, gdyż jest on nieefektywny.

Należy zwrócić uwagę, że przy różnych wzorcach sytuacja danego obiektu może być różna. Na przykład obiekt O₁₆ był najlepszy przy wzorcu medianowym, był zupełnie bez znaczenia przy wzorcu ekstremalnym i osiągnął niezły wynik przy wzorcu kwartylowym. Jest to zrozumiałe, gdyż każdy wzorzec ma na ogół inną strukturę nakładów w stosunku do rezultatów, a więc za każdym razem dany obiekt oceniany jest w stosunku do obiektów o różnych na ogół strukturach.

4. FUNKCJA Dyskryminacyjna

4.1. PROCEDURA KONSTRUKCJI FUNKCJI Dyskryminacyjnej

W klasycznej analizie ryzyka kredytowego dla stwierdzenia, czy dany obiekt jest „dobry” czy też „zły” konstruuje się funkcję dyskryminacyjną, np. słynną funkcję Z Altmana¹¹, a następnie, na podstawie wartości zmiennych niezależnych tej funkcji w analizowanym obiekcie, oblicza się jej wartość i ustala przydział obiektu do odpowiedniej grupy, np. grupy „nie ryzykownej” lub „ryzykownej”¹².

Podobne postępowanie proponuje się w zastosowaniach metod DEA do analizy ryzyka kredytowego. Za funkcję dyskryminacyjną przyjmuje się funkcję regresji, w którym zmienną zależną jest syntetyczny miernik zdolności kredytowej E , a zmiennymi niezależnymi są wykorzystane w modelu DEA zmienne charakteryzujące nakłady oraz rezultaty. Tak więc funkcja dyskryminacyjna ma formę:

$$\tilde{E} = b + \sum_n b_n X_n + \sum_r a_r Y_r \quad (18)$$

gdzie parametry wyznaczono jakąś metodą estymacji statystycznej, np. klasyczną mnk. W funkcji (18) wystąpić mogą wszystkie lub niektóre nakłady X_n oraz rezultaty Y_r . W przypadku modelu CCR za zmienną zależną E bierze się wskaźnik θ -efektywności, a w przypadku modelu SE-CCR – wskaźnik rankingowy ρ lub wskaźnik π -efektywności.

Niech γ będzie punktem odniesienia (= punktem „odcięcia”) syntetycznego miernika zdolności kredytowej. W zależności od kontekstu syntetycznym miernikiem jest wskaźnik empiryczny E lub jego aproksymacja \tilde{E} określona wzorem (18).

Obiekty, dla których syntetyczny miernik zdolności kredytowej \tilde{E} lub E jest większy od γ kwalifikowane są jako „zdrowe”, „dobre”, „mało ryzykowne”, „płynne” itp., a dla których syntetyczny miernik jest niewiekszy od γ – kwalifikowane są do grupy przeciwnej „niezdrowych ekonomicznie”, „złych”, „wysoce ryzykowanych”, „niepłynnych” itp.

Jest naturalne, że niekiedy trzeba wydzielić kilka klas zdolności kredytowej. Wówczas podstawa odniesienia ma charakter wielopunktowy; są to kolejne progi $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_L$. Wówczas, na przykład, jeśli $\tilde{E} < \gamma_1$ – to obiekt skrajnie niedobry, $\gamma_1 < \tilde{E} \leq \gamma_2$ – obiekt w dużym stopniu jest niedobry, ..., $\tilde{E} > \gamma_L$ – obiekt jest „celujący”. Klasyfikacja może też mieć charakter nierozłączny; oprócz obiektów „dobrych” oraz „złych” wyróżnia się obiekty „ani dobre, ani złe”.

W literaturze dotyczącej zastosowania DEA do analizy wniosków kredytowych, dla ustalania punktów odcięcia γ proponuje się wykorzystać analizy ekspertów¹³ lub niektóre wielkości statystycznych, np. za punkt odcięcia proponuje się przyjąć medianę¹⁴. Jeśli chodzi o wielopunktową podstawę odniesienia, to też można sugerować zastosowanie analizy eksperckiej lub statystycznej. W tym ostatnim przypadku – wykorzystujemy odpowiednie kwantyle w rozkładzie syntetycznego miernika zdolności kredytowej.

¹¹ Altman [1].

¹² Bardzo ładny przegląd różnych opracowanych w Polsce metod dyskryminacji w odniesieniu do klasyfikacji obiektów na „zdrowe” i „niezdrowe”) zawiera artykuł Hamrol, Chodakowski [11].

¹³ Np. [8], s. 115.

¹⁴ Np. [12], s. 1767.

4.2. PROBLEM 4 – CZY NALEŻY WERYFIKOWAĆ FUNKCJĘ Dyskryminacyjną?

W tradycyjnym podejściu funkcja dyskryminacyjna (18) określana jest na drodze ekonometrycznej i nie dziwią przeto zalecenia, aby w odniesieniu do niej stosować wszystkie podstawowe postulaty estymacji statystycznej, np. dobre dopasowanie oraz istotność zmiennej objaśniających.

Sądzymy, że to nie wystarcza. Jak bowiem wiadomo, modele regresyjne, choć powszechnie używane, mają „wady”, które niekiedy poddają w wątpliwość sens ich stosowania. Np. z uwagi na wewnętrzne korelacje zmiennych niezależnych oraz przechodność relacji skorelowania, znak współczynnika regresji może być zupełnie inny niż oczekiwany, a model wielu zmiennych na ogół nie jest „sumą” modeli dla pojedynczych zmiennych niezależnych¹⁵. Ponieważ na podstawie funkcji dyskryminacyjnej dokonywane są niekiedy bardzo ważne dla banku i dla wnioskodawcy analizy, powinna ona być wszechstronnie zweryfikowana, i to, przede wszystkim, pod względem merytorycznym. Ocena statystyczna jest tu tylko pomocnicza.

Propozycja rozwiązania problemu 4: *obok postulatów statystycznych istotności oraz dobrego dopasowania, należy dokonać merytorycznej oceny funkcji dyskryminacyjnej, badając przynajmniej poprawność znaków jej współczynników oraz ich skalę.*

W zastosowaniu DEA do *credit scoring* zmienną zależną (dyskryminatą) jest syntetyczny miernik zdolności kredytowej, który ma charakter maksymanty.

Dlatego też, jeśli coraz wyższy poziom zmiennej niezależnej (nakładu lub rezultatu) jest – *ceteris paribus* – oceniany coraz korzystniej z punktu widzenia zdolności kredytowej, to poprawny jest dodatni znak współczynnika regresji przy tej zmiennej. Jeśli zaś coraz wyższy poziom zmiennej niezależnej jest w warunkach *ceteris paribus* oceniany coraz bardziej niekorzystnie, to poprawny jest ujemny znak odpowiedniego współczynnika regresji¹⁶.

Przykład

W jednej z prac podano funkcję dyskryminacyjną, w której dyskryminata zależy ujemnie od grającego rolę rezultatu wskaźnika płynności. Jest to sprzeczne z wiedzą ekonomiczną. Z kolei w innym artykule proponuje się funkcję dyskryminacyjną, w której miernik zdolności kredytowej zależy dodatnio od wskaźnika ogólnego zadłużenia i zależy ujemnie od ROA.

4.3. PROBLEM 5 – CZY SZACOWANIE FUNKCJI Dyskryminacyjnej Jest Konieczne dla Zastosowania Metod DEA dla Oceny Zdolności Kredytowej?

Spojrzenie praktyczne

Z czysto praktycznego punktu widzenia funkcja dyskryminacyjna jest przede wszystkim potrzebna dla klasyfikowania nowych obiektów na „dobre” i „ryzykowne”

¹⁵ Byłoby tak, gdyby w materiale statystycznym wszystkie zmienne niezależne były względem siebie ortogonalne.

¹⁶ W rzeczywistości sprawa jest bardziej skomplikowana. W DEA za nakłady trzeba uznawać tylko takie wielkości, których wzrost jest niezbędny dla wzrostu rezultatów. Prowadzi to do tzw. postulatu koincydencji nakładów i rezultatów w modelach DEA.

pod względem zdolności kredytowej. Wówczas, podstawiając do odpowiedniego wzoru wartości zmiennych niezależnych charakteryzujących nowy obiekt, otrzymujemy wartość dyskryminaty dla nowego obiektu. Przyjmując ponadto pewien punkt odcięcia, można ustalić, czy obiekt ten zaliczyć do „dobrych” czy też nie.

Natomiast funkcja dyskryminacyjna dla obiektów już badanych w modelu DEA w zasadzie nie jest potrzebna, bo dysponujemy dla nich „prawdziwymi” (= empirycznymi) wartościami dyskryminaty. Aproksymacja ma jedynie sens, jeśli analityk chce bardziej elegancko zaprezentować wyniki obliczeń.

Spojrzenie formalne

Klasyczne podejście do estymacji funkcji dyskryminacyjnej jako funkcji regresji wydaje się intuicyjnie zrozumiałe: skoro w modelu DEA efektywność obiektu jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania decyzyjnego, czyli skoro jest ona przekształceniem empirycznych nakładów i rezultatów, to naturalne wydaje się, by funkcję dyskryminacyjną skonstruować jako model regresji, w którym zmiennymi niezależnymi są właśnie nakłady i rezultaty wykorzystywane przy określaniu efektywności. Idea ta jest jednak kontrowersyjna.

1. Po pierwsze, rodzi się pytanie, czy opis świata za pomocą modeli optymalizacyjnych jest tożsamy z opisem za pomocą modeli regresyjnych? Oczywiście, stosowanie jednego z nich nie wyklucza drugiego. Chodzi jednak o to, czy poprawne jest dyskryminowanie wartości uzyskanych z jednego podejścia za pomocą wartości uzyskanych w innym podejściu, jeśli w obu podejściach używa się *tych samych* zmiennych? Podobnie jest w wypadku liniowych równań przepływów bilansowych i liniowych modeli produkcji końcowej. Mimo zewnętrznego podobieństwa obu podejść układy równań liniowych wielu zmiennych nie są to przecież podejścia równoważne.

2. Po drugie, należy wyrazić wątpliwość, czy w ogóle konstrukcja „regresyjnej” funkcji dyskryminacyjnej jest poprawna. Jeśli bowiem przyjmuje się, że efektywność – jako rozwiązanie optymalne zadania decyzyjnego – zależy od nakładów i rezultatów, czyli przyjmuje się, że $E = f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, to dziwne na tym tle jest szacowanie modelu regresyjnego typu (18) w formie $E = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Bo to oznacza, jakby nie wierzone w wyniki modelu decyzyjnego. W przytoczonych wzorach symbol \mathbf{X} to empiryczna macierz nakładów, \mathbf{Y} – empiryczna macierz rezultatów, E – wektor wskaźników efektywności obiektów.

3. Po trzecie, jeśli funkcja dyskryminacyjna, g , jest liniowa – a tak jest najczęściej – to aproksymacja rozwiązania zadania decyzyjnego oznacza rozpatrywanie dość „dziwnej” zależności, że rozwiązanie optymalne $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, już będące funkcją \mathbf{X}, \mathbf{Y} , jeszcze dodatkowo zależy od tychże \mathbf{X} oraz \mathbf{Y} .

Naturalnie można byłoby ratować to podejście i konstruować funkcję dyskryminacyjną względem nakładów i rezultatów nie ujętych w modelu DEA, ale to też będzie wątpliwe. Skoro bowiem w modelu DEA syntetyczną charakterystykę zdolności kredytowej uzależniono od \mathbf{X} oraz \mathbf{Y} , to dlaczego teraz uzależniać ją od innych zmiennych, powiedzmy \mathbf{Z} oraz \mathbf{V} ?

Propozycja rozwiązania problemu 5: proponujemy, aby stosując metody DEA, wręcz zrezygnować z konstrukcji funkcji dyskryminacyjnej, a klasyfikację obiektów przeprowadzać na podstawie modelu DEA z dozwolonymi wzorcami.

Odpowiednią procedurą omówiono poniżej.

5. PROPOZYCJA PROCEDURY DYSKRYMINACJI WNIOSKÓW KREDYTOWYCH

Proponujemy, by zgodnie z duchem *Data Envelopment Analysis* dla określenia zdolności kredytowej nowego obiektu (lub ich grupy), a jeśli trzeba, to i „starych” obiektów rozwiązać odpowiednie zadania z *dozwołonymi* wzorcami, a więc zadania, w których wagi intensywności mogą być dodatnie tylko dla obiektów wzorcowych (przykładowy model z dozwołonymi wzorcami sformułowano niżej). Badamy wówczas zdolność kredytową obiektów albo „starych”, albo „nowych”, albo „i starych i nowych” na tle z góry ustalonych obiektów wzorcowych.

Następnie należy przeprowadzić zwykłe zadanie klasyfikacji obiektów, kierując się ustalonymi punktami odcięcia w odniesieniu do uzyskanych wskaźników efektywności (lub nadefektywności).

Nie ma natomiast potrzeby konstrukcji jakiegokolwiek funkcji dyskryminacyjnej (regresyjnej lub innej).

Przy obecnych środkach obliczeniowych rozwiązanie modelu DEA nawet dla dużych zbiorów danych nie stwarza żadnego kłopotu¹⁷.

5.1. UKIERUNKOWANY NA NAKŁADY STANDARDOWY MODEL SE-CCR Z DOZWOŁONYMI WZORCAMI

Niech B oznacza zbiór badanych obiektów (mogą to być tylko „stare” obiekty lub tylko „nowe”, lub obie te grupy łącznie). Natomiast W niech oznacz zbiór obiektów-wzorców. Dysponujemy informacjami o wielkości nakładów oraz rezultatów dla wszystkich obiektów z obu zbiorów.

Zadanie dla obiektu $o \in B$ polega na znalezieniu takich wag intensywności λ_{oj} , gdzie $j \in W$ oraz takiego mnożnika nakładów ρ_o , że:

$$\min \rho_o \quad (19)$$

przy warunkach:

$$\sum_{j \in W} \lambda_{oj} y_{rj} \geq y_{ro} \quad (r = 1, \dots, R), \quad (20)$$

$$\sum_{j \in W} \lambda_{oj} x_{nj} \leq \rho_o x_{no} \quad (n = 1, \dots, N), \quad (21)$$

$$\rho_o, \lambda_{oj} \geq 0 \quad j \neq o, \quad j \in W, \quad o \in B. \quad (22)$$

Zadanie to można rozwiązać jako „zwykłe” zadanie SE-CCR, narzucają jednak warunki $\lambda_{oj} = 0$ dla $j \notin W$.

¹⁷ Jeśli oceniamy zdolność kredytową tylko nowych obiektów, to można rozpatrywać tylko zbiór tych obiektów. Oczywiście, z uwagi na ustalenie wzorców, nie będzie błędem rozpatrzenie zbioru wszystkich, starych i nowych obiektów (choć wiele rachunków wykonamy niepotrzebne).

5.2. PRZYKŁAD EMPIRYCZNY

Należy zaklasyfikować do odpowiednich grup cztery obiekty scharakteryzowane nakładami i rezultatami podanymi w tabeli 5 (obiekty O_{20} , O_{21} , O_{22} i O_{23}). W tabeli podano też wzorce. Są to dwa wzorce „eksperckie”, E_1 i E_2 , z tym że wzorec ekspercki E_2 jest identyczny z obiektem O_{19} oraz jeden wzorec statystyczny – wzorec kwartyłowy.

Tabela 5

Nakłady i rezultaty czterech nowych obiektów oraz wzorce

Nakład/ Rezultat	Nowe obiekty				Wzorce		
	Obiekt O20	Obiekt O21	Obiekt O23	Obiekt O24	E1	O19	kwartyłowy
X_1	1003	3000	1700	3700	5000	856	1446
X_2	1500	323	80	1800	1000	68	83
X_3	640	7131	1900	1400	8000	1029	1932
X_4	500	636	2113	1130	7000	132	1113
X_5	921	960	3210	674	3000	289	1210
X_6	1000	1402	2230	632	15000	989	3230
Y_1	400	2810	5600	6005	4000	40	6401
Y_2	700	1459	1980	1342	4000	132	981
Y_3	300	765	1002	400	3000	11	1022

Źródło: obliczenia własne.

W celu obliczenia syntetycznego wskaźnika zdolności kredytowej wykorzystamy ukierunkowany na nakłady standardowy model SE-CCR. Wskaźnikiem zdolności kredytowej będzie wskaźnik rankingowy ρ . Obiekty poklasyfikujemy na pięć grup. Przyjmujemy, że zdolność kredytowa jest:

- (i) niewystarczająca mała, gdy $\rho < 0,5$
- (ii) niewystarczająca umiarkowana, gdy $0,5 \leq \rho < 0,8$
- (iii) wystarczająca umiarkowana, gdy $0,8 \leq \rho < 1,5$
- (iv) wystarczająca dobra, gdy $1,5 \leq \rho < 2,5$
- (v) wystarczająca bardzo dobra, gdy $\rho > 2,5$.

Wskaźniki rankingowe obiektów oraz przydział do grup przedstawia tabela 6.

Tabela 6

Wskaźniki rankingowe oraz klasyfikacja obiektów

Obiekt	ρ	Grupa	Obiekt	ρ	Grupa	Obiekt	ρ	Grupa
O_1	0,270	i	O_8	0,191	i	O_{16}	0,987	Iii
O_2	0,536	ii	O_9	0,250	i	O_{17}	0,341	i
O_3	0,276	i	O_{10}	0,384	i	O_{18}	0,864	iii
O_4	0,491	i	O_{11}	0,353	i	O_{20}	2,305	iv
O_5	0,364	i	O_{12}	0,445	i	O_{21}	3,426	v
O_6	0,378	i	O_{13}	0,641	ii	O_{23}	2,923	v
O_7	0,418	i	O_{14}	0,249	i	O_{24}	6,991	v
			O_{15}	0,422	i	O_{19}	1,135	iii

Źródło: obliczenia własne.

W sensie przyjętych kryteriów większość obiektów nie ma wystarczającej zdolności kredytowej. Bardzo dobrą zdolnością kredytową charakteryzują się nowe obiekty O20-024.

6. PODSUMOWANIE

1. W artykule wskazano, że tradycyjna procedura określania zdolności kredytowej poprzez:

- rozwiązanie zadania CCR lub BCC,
- oszacowanie funkcji dyskryminacyjnej jako funkcji regresji, w której zmienną zależną jest wskaźnik efektywności a zmiennymi niezależnym są użyte w zadaniu DEA zmienne charakteryzujące nakłady oraz rezultaty ma wiele wad, w szczególności dotyczących funkcji dyskryminacyjnej.

2. W związku z tym zaproponowano procedurę określania zdolności kredytowej w ogóle bez funkcji dyskryminacyjnej. Procedura cały czas opiera się na pojęciach i metodach DEA. Jej etapy są następujące:

(i) Ustala się wstępne obiekty wzorcowe, np. na podstawie analizy eksperckiej lub statystycznej.

(ii) Rozwiązuje się zadanie SE-DEA z obiektami empirycznymi oraz wzorcowymi.

(iii) W oparciu o te wyniki weryfikuje się wstępne wzorce. Np. wzorzec może być zaakceptowany, gdy na tle obiektów empirycznych jest on w pełni efektywny w sensie Farrella. Obok tego mogą być, oczywiście, uwzględniane inne kryteria.

(iv) Ustala się syntetyczny miernik zdolności kredytowej poszczególnych obiektów („starych”, „nowych”) poprzez rozwiązanie odpowiedniego zadania SE-DEA z *dozwołonymi wzorcami*, np. (19)-(22).

(v) Przydział obiektów do grup odbywa się poprzez porównywanie obliczonych w etapie (iv) syntetycznych mierników zdolności kredytowej z punktem (punktami) odcięcia.

3. Obok badania zdolności kredytowej proponowana procedura może być stosowana do pokrewnych zagadnień – do oceny ryzyka, badania zagrożenia bankructwem, kwalifikacji do grup jakościowych itp.

Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

LITERATURA

- [1] Altman E.I., [1968], *Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy*, „The Journal of Finance”, 23, 4.
- [2] Andersen P., Petersen N.C., [1993], *A procedure for ranking efficient units in Data Envelopment Analysis*, „Management Science”, 39, 10.
- [3] Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W., [1984], *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis*, „Management Science”, 30.
- [4] Banker R.D., Gilford J.L., [1988], *A relative efficiency model for the evaluation of public health nurse productivity*, Mellon University Mimeo, Cornege.
- [5] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E., [1978], *Measuring the efficiency of decision making units*, „European Journal of Operational Research”, 2.
- [6] Cook W.D., Seiford L.M., [2009], *Data envelopment analysis (DEA) – Thirty years on*, „European Journal of Operational Research”, 192, 1.
- [7] Chang E.W.I., Chiang Y.H., Tang B.S., [2007], *Alternative approach to credit scoring by DEA: Evaluating borrowers with respect to PFI projects*, „Building and Environment”, 42, 4.
- [8] Emel A.B., Oral M., Reisman A., Yolalan R., [2003], *A credit scoring approach for the commercial banking sector*, „Socio-Economic Planning Sciences”, 37, 2.
- [9] Feruś A., [2006], *Zastosowanie metody DEA do określania poziomu ryzyka kredytowego przedsiębiorstw*, „Bank i Kredyt”, 7.
- [10] Gospodarowicz A., [2004], *Możliwości wykorzystania metody DEA do oceny ryzyka kredytowego w kontekście Nowej Umowy Kapitałowej*, w: *Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, (red. A. Zeliaś), Wyd. Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- [11] Hamrol M., Chodakowski J., [2008], *Prognozowanie zagrożenia finansowego przedsiębiorstwa. Wartość predykcyjna polskich modeli analizy dyskryminacyjnej*, *Badania Operacyjne i Decyzje*, 3.
- [12] Min J.H., Lee Q-C., [2008], *A practical approach to credit scoring*, „Expert System with Applications”, 35, 4.
- [13] Paradi J.C., Asmild M., Simak P.C., [2004], *Using DEA and worst practice DEA in credit risk evaluation*, „Journal of Productivity Analysis”, 21.
- [14] Truott M.D., Rai A., Zhang A., [1996], *The potential use of DEA for credit applicant acceptance system*, „Computers and Operations Research”, 23, 4.
- [15] Yeh Q.J., [1996], *The application of data envelopment analysis in conjunction with financial ratios for bank performance evaluation*, „Journal of Operational Research Society”, 47, 8.

Praca wpłynęła do redakcji w marcu 2009 r.

UWAGI NA TEMAT ZASTOSOWANIA METODY DEA DO USTALANIA ZDOLNOŚCI KREDYTOWEJ

Streszczenie

W artykule wskazano, że tradycyjna dla DEA procedura określania zdolności kredytowej poprzez rozwiązanie zadania CCR lub BCC oraz oszacowanie funkcji dyskryminacyjnej jako funkcji regresji, w której zmienną zależną jest wskaźnik efektywności, a zmiennymi niezależnymi są użyte w zadaniu DEA zmienne charakteryzujące nakłady oraz rezultaty ma wiele wad. Głównie dotyczą one funkcji dyskryminacyjnej. W związku z tym zaproponowano procedurę określania zdolności kredytowej w ogóle bez funkcji dyskryminacyjnej.

Procedura cały czas opiera się na pojęciach i metodach DEA. W szczególności proponuje się wykorzystanie modelu nadefektywności DEA, a zamiast funkcji dyskryminacyjnej proponuje się użyć modeli SE-DEA z *dozwolonymi wzorcami*. Typowanie obiektów do grup odbywa się tradycyjnie, poprzez porównanie miernika zdolności kredytowej (tu: wskaźnika rankingowego) z punktami odcięcia.

Słowa kluczowe: DEA, SE-CCR, zdolność kredytowa, DEA z dozwolonymi wzorcami

ESTIMATION OF CREDIT CAPACITY USING DATA ENVELOPMENT ANALYSIS

Summary

The article points out some disadvantages of traditional (based on DEA methodology) procedure of estimating credit capacity which consists in solving CCR and BCC models and estimating a discriminant function where efficiency indicator is a dependent variable and inputs and outputs used in DEA models are independent variables.

Since the main problems with this procedure are connected with discriminant function, the author suggests a procedure of credit capacity estimation which uses no discriminant function. The new method is based on DEA methodology, particularly on super-efficiency DEA models (SE-DEA models) with *permitted benchmarks*. Comparing the credit capacity indicator (here: ranking indicator) with cut-off points enables objects classification.

Key words: DEA, SE-CCR, credit capacity, DEA with permitted benchmarks